II Esonero di FM210 del 7-11-14
E. Scoppola

Esercizio 1

1) Nel caso dell'oscillatore armonico forzato dato da

$$\ddot{x} + 4x + \alpha\dot{x} = \sin(\omega t) \tag{1}$$

con $\alpha \geq 0$ e $\omega \geq 0$ possiamo applicare le formule generali con $\omega_0 = 2$, $m = 1$ periodo della funzione forzante $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e unici coefficienti di Fourier non nulli: $\hat{f}_1 = \frac{1}{2i}$, $\hat{f}_{-1} = -\frac{1}{2i}$. La soluzione dell'omogenea associata decade esponenzialmente nel tempo se e solo se $\alpha > 0$. La soluzione particolare, indipendentemente dal fatto se c'e' o no risonanza, non decade esponenzialmente in t ma e' nulla nel caso $\omega = 0$ e dunque i valori dei parametri per avere decadimento esponenziale della soluzione sono $\alpha > 0$, $\omega = 0$.

2) La condizione $\limsup_{t\to\infty} |x(t)| = +\infty$ si verifica solo nel caso in cui c'e' risonanza. Questo implica i valori dei parametri $\alpha = 0$, $\omega = \omega_0 = 2$.

3) Nel caso $\alpha = 4$, $\omega = 2$ applicando le formule generali otteniamo:

$$x_{omog}(t) = e^{-2t}(B_1 + B_2 t)$$

e

$$x_{part}(t) = \frac{\hat{f}_1 e^{i2t}}{i8} + \frac{\hat{f}_{-1} e^{-i2t}}{-i8} = -\frac{1}{8}\cos 2t$$

Calcolando la soluzione $x(t) = x_{moog}(t) + x_{part}(t)$ sui dati iniziali otteniamo

$$x(0) = 1 = B_1 - \frac{1}{8}, \qquad \dot{x}(0) = 0 = -2B_1 + B_2$$

da cui $B_1 = \frac{9}{8}$ e $B_2 = \frac{9}{4}$ e dunque la soluzione cercata è:

$$x(t) = \frac{9}{8}e^{-2t}(1 + 2t) - \frac{1}{8}\cos 2t$$

Esercizio 2

1) L'equazione del moto in $\mathbb{R}^3$ è:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\Big(\frac{K}{r^2} - \frac{2\alpha}{r^3}\Big)\hat{e}_r = \Big(-\frac{K}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{2\alpha}{|\mathbf{x}|^4}\Big)\mathbf{x}$$

2) I dati iniziali tali che il moto si svolge sul piano x, y sono $\mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0)$ nel piano x, y.

3) Le equazioni del moto sul piano x, y in coordinate polari sono:

$$\ddot{r} = -V'_{eff}(r) = -\frac{K}{r^2} + \frac{L^2 + 2\alpha}{r^3}, \qquad \dot{\phi} = \frac{L}{r^2}$$

con $V_{eff}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{(L^2+2\alpha)}{2r^2}$.

4) La discussione qualitativa del moto della variabile $r(t)$ è equivalente a quella del problema di Keplero giacchè il potenziale efficace è della stessa forma. Abbiamo un punto di equilibrio $r_c = \frac{L^2+2\alpha}{K}$ per dati iniziali $r(0) = r_c$ e $\dot{r}(0) = 0$. Moti periodici per la variabile $r(t)$ per dati iniziali $r(0), \dot{r}(0)$ tali che per l'energia $E = \frac{1}{2}\dot{r}(0)^2 + V_{eff}(r(0))$ vale

$$V_{eff}(r_c) = -\frac{K^2}{2(L^2+2\alpha)} < E < 0$$

e moti illimitati per $E > 0$.

5) L'equazione delle orbite nel piano x, y è data da:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\frac{r^2}{L}\sqrt{2(E - V_{eff}(r)}$$

6) Il moto del sistema complessivo è periodico se $-\frac{K^2}{2(L^2+2\alpha)} \leq E < 0$ e inoltre

$$\frac{\Phi}{\pi} \in \mathbb{Q}$$

con

$$\Phi = \int_{r_-}^{r_+} \frac{L}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2(E - V_{eff}(r)}} \tag{2}$$

dove $r_\pm = r_\pm(E)$ sono soluzioni dell'equazione $V_{eff}(r) = E$.

7) Per ottenere la condizione sui dati iniziali e il parametro α per la periodicità valutiamo $\Phi = \Phi(L, \alpha)$. Per $r_\pm$ abbiamo

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{L^2+2\alpha}\Big(K \mp \sqrt{K^2 + 2E(L^2+2\alpha)}\Big)$$

Dalla definizione (2) otteniamo

$$\Phi = \frac{L}{\sqrt{2}}\int_{r_-}^{r_+} \frac{1}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{E + \frac{K}{r} - \frac{L^2+2\alpha}{2r^2}}}$$

e col cambiamento di variabile $r \to w = \frac{1}{r}$ ricaviamo

$$\Phi = \frac{L}{\sqrt{2}}\int_{w_+}^{w_-} \frac{dw}{\sqrt{E + Kw - \frac{L^2+2\alpha}{2}w^2}}$$

e con l'ulteriore cambiamento di variabile $w \to y = \Big(\frac{L^2+2\alpha}{2}\Big)^{1/2} w - \frac{K}{\sqrt{2(L^2+2\alpha)}}$ otteniamo

$$\Phi = \frac{L}{\sqrt{L^2+2\alpha}}\int_{y_+}^{y_-} \frac{dy}{\sqrt{a - y^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2+2\alpha}}\Big(\arcsin(\frac{y_-}{\sqrt{a}}) - \arcsin(\frac{y_+}{\sqrt{a}})\Big)$$

con $a = E + \frac{K^2}{2(L^2+2\alpha)}$. Dal calcolo diretto otteniamo $y_\mp = \pm\sqrt{a}$ infatti

$$y_\mp = \Big(\frac{L^2+2\alpha}{2}\Big)^{1/2}\Big[\frac{1}{L^2+2\alpha}\Big(K \pm \sqrt{K^2 + 2E(L^2+2\alpha)}\Big)\Big] - \frac{K}{\sqrt{2(L^2+2\alpha)}} =$$

$$\pm\frac{\sqrt{K^2 + 2E(L^2+2\alpha)}}{\sqrt{2(L^2+2\alpha)}} = \sqrt{a}$$

da cui

$$\Phi = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 2\alpha}}\pi$$

e dunque la condizione di periodicità risulta essere

$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + 2\alpha}} \in \mathbb{Q}.$$