

**Scritto di FM210: 7 - 9 - 2016**

E. Scoppola

**Esercizio 1**

Si consideri un punto materiale di massa unitaria soggetto ad una forza centrale a simmetria sferica di energia potenziale

$$V(r) = r^2 - \log r.$$

- 1) Scrivere le equazioni del moto.
- 2) Disegnare il grafico del potenziale efficace e discutere qualitativamente il moto nello spazio delle fasi della variabile radiale.
- 3) Determinare per quali dati iniziali il moto complessivo ha luogo in una regione limitata dello spazio.
- 4) Determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto circolare uniforme di raggio unitario e determinarne il periodo.
- 5) (*facoltativo*) Per dati iniziali arbitrari, qual'è la condizione di chiusura delle orbite?

**Scritto di FM210: 7 - 9 - 2016**

E. Scoppola

**Esercizio 2**

Si consideri il sistema meccanico costituito da due dischi sottili, rigidi, omogenei di raggio  $r$  e di masse  $m_1$  ed  $m_2$  e centri  $C_1$  e  $C_2$  posti nel piano verticale  $\Pi$  e vincolati a rotolare senza strisciare rispettivamente all'interno e all'esterno di una guida circolare di raggio  $R = 2r$  con centro fisso in un punto  $O$ . Tra i due centri  $C_1$  e  $C_2$  è posta una molla ideale di costante di richiamo  $K$  e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane gli angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  che  $OC_1$  ed  $OC_2$  formano con l'asse  $y$  ed il caso  $m_1 = 3m_2$ .

- 1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
- 2) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
- 3) Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.
- 4) (*facoltativo*) Se il piano  $\Pi$  è posto in rotazione attorno all'asse verticale passante per il punto  $O$  con velocità angolare costante  $\omega$ , scrivere la lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con  $\Pi$ .