

Scritto di FM210 del 7-9-2016

E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

- 1) Usando la centralità del campo di forza, dalla conservazione del momento angolare, si può dedurre che il moto è planare. Usando coordinate polari sul piano dove si svolge il moto, individuato dai dati iniziali, possiamo scrivere le equazioni del moto:

$$\ddot{r} = -V'_{eff} = -2r + \frac{1}{r} + \frac{L^2}{r^3}$$
$$r^2 \dot{\phi} = cost = L$$

con

$$V_{eff} = r^2 - \log r + \frac{L^2}{2r^2}$$

- 2) Il potenziale efficace ha il comportamento riportato nella figura seguente. Ha un unico minimo nel punto $r_c = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 8L^2}}$. Questo punto r_c associato ad una velocità nulla rappresenta un punto di equilibrio per il moto radiale. Nel piano dove avviene il moto questo punto di equilibrio corrisponde ad una orbita circolare di raggio r_c percorsa con velocità angolare costante $\dot{\phi} = \frac{L}{r_c^2}$. Le altre orbite nello spazio delle fasi della variabile radiale sono orbite periodiche poiché il potenziale efficace tende a infinito sia per $r \rightarrow 0$ che per $r \rightarrow \infty$ e dunque per ogni valore dei dati iniziali eccetto $r(0) = r_c$ con $\dot{r}(0) = 0$, corrispondente al punto di equilibrio discusso sopra, esiste una coppia di punti di inversione del moto r_{\pm} , che risolvono l'equazione

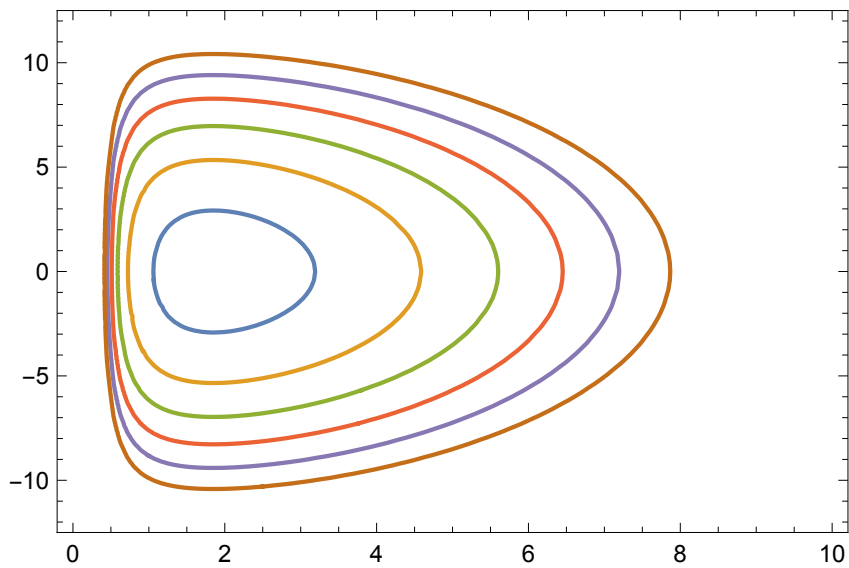
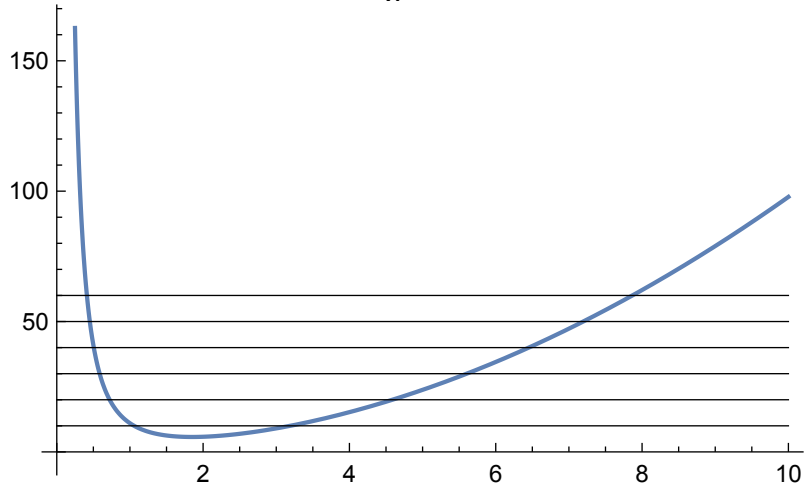
$$V_{eff}(r) = E$$

dove E indica l'energia totale determinata dai dati iniziali

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}(0) + V_{eff}(r(0)).$$

Le orbite nello spazio delle fasi radiale sono descritte dal disegno che segue. A queste orbite periodiche nel piano delle fasi r, \dot{r} , corrispondono nel piano dove avviene il moto, orbite che si svolgono nella corona circolare compresa tra r_- ed r_+ .

$$x^2 + \frac{10}{x^2} - \log(x)$$



3) Per quanto detto nel punto precedente abbiamo che per qualunque dato iniziale il moto avviene in un regione limitata dello spazio. Questo vale anche nel caso particolare di dati iniziali $\mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0)$ paralleli, in cui $L = 0$ ed il moto avviene sulla retta definita dai dati iniziali.

4) I dati iniziali cui fa seguito un moto circolare uniforme di raggio unitario sono

$$r(0) = 1 \quad \dot{r}(0) = 0, \quad \phi(0), \quad \dot{\phi}(0)$$

con $\phi(0)$ qualsiasi e $\dot{\phi}(0)$ tale che

$$r_c = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 8L^2}} = 1$$

che equivale a richiedere $L = 1$ e dunque $\dot{\phi}(0) = 1$. Otteniamo dunque che il periodo di questo moto circolare uniforme è dato da $T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = 2\pi$.

- 5) Per dati iniziali arbitrari la condizione di chiusura dell'orbita che si svolge nella corona tra r_- e r_+ è:

$$\frac{\Phi}{\pi} \in \mathbb{Q}$$

con

$$\Phi := \int_{r_-}^{r_+} \frac{L}{\sqrt{2}} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{E - V_{eff}(r)}} dr$$

Soluzione esercizio 2

- 1) Per i centri C_1 e C_2 abbiamo le coordinate

$$x_1 = r \sin \theta_1, \quad y_1 = -r \cos \theta_1$$

$$x_2 = 3r \sin \theta_2, \quad y_2 = -3r \cos \theta_2$$

e, indicando con $\dot{\phi}_1$ e $\dot{\phi}_2$ le velocità angolari con cui i dischi ruotano attorno ai loro baricentri, otteniamo le condizioni di rotolamento

$$|\dot{\phi}_1| = \frac{|v_{C_1}|}{r} = |\dot{\theta}_1|, \quad |\dot{\phi}_2| = \frac{|v_{C_2}|}{r} = 3|\dot{\theta}_2|$$

da cui, applicando il teorema di Koenig, otteniamo per l'energia cinetica

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 r^2}{2} \dot{\theta}_1^2 = \frac{3}{4} m_1 r^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 9r^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 r^2}{2} 9\dot{\theta}_2^2 = \frac{3}{4} m_1 r^2 3\dot{\theta}_2^2$$

L'energia potenziale è la somma del potenziale gravitazionale e di quello elastico

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_{el} = \\ &= -m_1 g r \cos \theta_1 - 3m_2 g r \cos \theta_2 + \frac{1}{2} K r^2 \left[(\sin \theta_1 - 3 \sin \theta_2)^2 + (\cos \theta_1 - 3 \cos \theta_2)^2 \right] = \\ &= -m_1 g r (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) - 3K r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + cost \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4} m_1 r^2 (\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_2^2) + m_1 g r (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + 3K r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (1)$$

con equazioni del moto:

$$\frac{3}{2} m_1 r^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g r \sin \theta_1 - 3K r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (2)$$

$$\frac{9}{2} m_1 r^2 \ddot{\theta}_2 = -m_1 g r \sin \theta_2 + 3K r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (3)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = m_1 g r \sin \theta_1 + 3K r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = m_1 g r \sin \theta_2 - 3K r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Sommando otteniamo $m_1 g r (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = 0$ da cui

$$\theta_2 = -\theta_1, \quad \text{oppure} \quad \theta_2 = \pi + \theta_1$$

e sostituendo nella prima equazione ricaviamo

$$m_1 g r \sin \theta_1 + 3K r^2 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 = 0 \quad \text{nel caso} \quad \theta_2 = -\theta_1$$

$$m_1 g r \sin \theta_1 = 0 \quad \text{nel caso} \quad \theta_2 = \pi + \theta_1.$$

Riassumendo otteniamo i punti di equilibrio

$$(0, 0), \quad (\pi, \pi), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 0)$$

e se $\lambda := \frac{m_1 g}{6K r} < 1$ abbiamo anche i punti

$$(\bar{\theta}, -\bar{\theta}) \quad \text{con} \quad \bar{\theta} = \arccos(-\lambda).$$

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} m_1 g r \cos \theta_1 + 3K r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & -3K r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -3K r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_1 g r \cos \theta_2 + 3K r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} \quad (4)$$

nei diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(0, 0) = \begin{pmatrix} m_1 g r + 3K r^2 & -3K r^2 \\ -3K r^2 & m_1 g r + 3K r^2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante e traccia positivi, dunque il punto è stabile.

$$V''(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} -m_1 g r + 3K r^2 & -3K r^2 \\ -3K r^2 & -m_1 g r + 3K r^2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante positivo se $\lambda > 1$, ma, in questo caso, ha traccia negativa. Dunque il punto (π, π) è un massimo se $\lambda > 1$ e un punto di sella se $\lambda < 1$, in tutti i casi instabile.

$$V''(0, \pi) = \begin{pmatrix} m_1 g r - 3K r^2 & 3K r^2 \\ 3K r^2 & +m_1 g r - 3K r^2 \end{pmatrix}$$

con determinante e e traccia negativi e dunque sella instabile e analogamente instabile è il punto $(\pi, 0)$ con

$$V''(\pi, 0) = \begin{pmatrix} -m_1 g r - 3K r^2 & 3K r^2 \\ 3K r^2 & -m_1 g r - 3K r^2 \end{pmatrix}$$

Nel caso $\lambda < 1$ abbiamo gli altri due punti di equilibrio $(\bar{\theta}, -\bar{\theta})$:

$$V''(\bar{\theta}, -\bar{\theta}) = \begin{pmatrix} -\lambda m_1 g r + 3K r^2 \cos 2\bar{\theta} & -3K r^2 \cos 2\bar{\theta} \\ -3K r^2 \cos 2\bar{\theta} & -\lambda m_1 g r + 3K r^2 \cos 2\bar{\theta} \end{pmatrix}$$

con determinante positivo e traccia negativa, dunque questi punti sono dei massimi e dunque sono instabili.

- 3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(0, 0)$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (\theta_1, \theta_2)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q}, V''(0, 0)\mathbf{q}) \quad (5)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}m_1r^2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2}m_1r^2 \end{pmatrix}$$

- 4) Se il piano Π è messo in rotazione, nel riferimento K solidale con Π dobbiamo sottrarre alla lagrangiana precedente il potenziale centrifugo dei due dischi ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K = & \frac{3}{4}m_1r^2(\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_2^2) + m_1gr(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + 3Kr^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ & + \frac{1}{2}m_1\omega^2r^2 \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{2}m_1\omega^23r^2 \sin^2 \theta_2. \end{aligned}$$