Scritto di FM210 del 20-1-2015

Soluzione Esercizio 1

1) È conveniente introdurre le variabili relativa e del centro di massa definite da

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{1}$$

Dalle equazioni del moto

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{2}$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{3}$$

otteniamo immediatamente che l'accelerazione del centro di massa é nulla e dunque la sua velocitá é una costante del moto. Il moto del centro di massa é libero e possiamo dunque scegliere l'origine del nostro sistema di riferimento nel centro di massa. Il moto relativo nella variabile $\mathbf{r}$ è quello di un punto materiale di massa ridotta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ in un potenziale centrale. Poiché il campo di forza é centrale abbiamo anche la conservazione del momento angolare, il moto relativo può essere dunque studiato in un piano. In coordinate polari nel piano esso é descritto dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}kr^2 \tag{4}$$

Il momento angolare, costante, è ortogonale al piano del moto, ed ha modulo $p_\phi = \mu r^2 \dot{\phi}$.

Il campo di forza centrale é conservativo e dunque si conserva anche l'energia totale

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}kr^2 \tag{5}$$

Il moto relativo si riduce dunque ad un problema unidimensionale con $r > 0$ e potenziale efficace

$$V_{eff} = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\phi^2}{\mu r^2}. \tag{6}$$

2) Dallo studio della funzione $V_{eff}(r)$ otteniamo che essa é sempre positiva con un unico punto critico

$$r_0 = (\frac{p_\phi^2}{\mu k})^{\frac{1}{4}} \tag{7}$$

che é un minimo con $V_{eff}(r_0) = p_\phi(\frac{k}{\mu})^{\frac{1}{2}} \equiv E_0$

Il punto r_0 é dunque un punto di equilibrio stabile per il problema unidimensionale.

Per dati iniziali corrispondenti ad $E > E_0$ il problema unidimensionale ha moto periodico tra due punti r_- e r_+ che sono due punti di inversione dati da:

$$r_+^2 = \frac{E + \sqrt{E^2 - kp_\phi^2/\mu}}{k}, \quad r_-^2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - kp_\phi^2/\mu}}{k}. \tag{8}$$

Il periodo corrispondente a questo moto é dato da

$$T(E) = 2\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(r))}} \tag{9}$$

3) Il moto relativo descritto dalla variabile $\mathbf{r}$ con massa ridotta μ si svolge nel piano ortogonale al vettore momento angolare, definito dai dati iniziali.

In particolare per dati iniziali corrispondenti ad $E = E_0$, si svolge sull'orbita circolare di raggio r_0 percorsa con velocità angolare costante.

Nel caso invece di dati iniziali corrispondenti ad $E > E_0$ si svolge nella corona circolare tra r_- ed r_+ su un'orbita di equazione

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\frac{\mu r^2}{p_\phi}\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(r))} \tag{10}$$

Queste orbite sono chiuse poiché l'angolo Φ tra pericentro e apocentro ottenuto integrando la precedente equazione per separazione di variabili, è dato da

$$\Phi = \int_{r_-}^{r_+} \frac{p_\phi}{r^2\sqrt{2\mu(E - V_{eff}(r)}}dr = \frac{\pi}{2}$$

D'altra parte anche dal teorema di Bertrand sappiamo che queste orbite sono chiuse.

Dal moto relativo $\mathbf{r}(t)$ si può facilmente ricostruire il moto dei due punti materiali originari, nel riferimento con origine nel centro di massa, dalle equazioni

$$\mathbf{r_1}(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}(t), \qquad \mathbf{r_2}(t) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}(t)$$

Soluzione Esercizio 2

1) Definiamo $r := \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2}$

$$x_G = x + r\sin\theta \qquad y_G = R - r\cos\theta \tag{11}$$

e dunque, dal teorema di Konig, l'energia cinetica della sbarra è

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\Big[(\dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (r\dot{\theta}\sin\theta)^2\Big] + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}m\Big[\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}r\cos\theta + \frac{l^2}{12}\dot{\theta}^2\Big] \tag{13}$$

Per l'anello, dalla condizione di rotolamento $\dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{R}$ otteniamo

$$T_a = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = M\dot{x}^2 \tag{14}$$

L'energia potenziale è

$$V = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}K\Big[x^2 + 2xr\sin\theta - 2rR\cos\theta\Big] \tag{15}$$

e quindi otteniamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Big[\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2(r^2 + \frac{l^2}{12}) + 2\dot{x}\dot{\theta}r\cos\theta\Big] + M\dot{x}^2 + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}K\Big[x^2 + 2xr\sin\theta - 2rR\cos\theta\Big] \tag{16}$$

Le equazioni del moto sono:

$$(m + 2M)\ddot{x} + m\ddot{\theta}r\cos\theta - m\dot{\theta}^2 r\sin\theta = -Kx - Kr\sin\theta \tag{17}$$

$$m(r^2 + \frac{l^2}{12})\ddot{\theta} + m\ddot{x}r\cos\theta = -mgr\sin\theta - Kxr\cos\theta - KrR\sin\theta \tag{18}$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx + Kr\sin\theta = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgr\sin\theta + K\Big[xr\cos\theta + rR\sin\theta\Big] = 0 \tag{20}$$

da cui

$$x = -r\sin\theta \qquad r\sin\theta\Big[mg - Kr\cos\theta + KR\Big] = 0 \tag{21}$$

La quantità entro la parentesi quadra non è mai nulla perché $R > r$ e dunque otteniamo solo due punti di equilibrio: $(x_1, \theta_1) = (0, 0)$ e $(x_2, \theta_2) = (0, \pi)$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(x, \theta) = \begin{pmatrix} K & Kr\cos\theta \\ Kr\cos\theta & mgr\cos\theta + K[-xr\sin\theta + rR\cos\theta] \end{pmatrix} \tag{22}$$

nei due diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(x_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} K & Kr \\ Kr & mgr + KrR \end{pmatrix} \tag{23}$$

che ha traccia e determinante positivi, dunque il punto (x_1, θ_1) è stabile.

$$V''(x_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} K & -Kr \\ -Kr & -mgr - KrR \end{pmatrix} \tag{24}$$

che ha determinante negativo e dunque (x_2, θ_2) è instabile.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(0, 0)$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (x, \theta)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q}, V''(x_1, \theta_1)\mathbf{q}) \tag{25}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2M + m & mr \\ mr & m(r^2 + \frac{l^2}{12}) \end{pmatrix} \tag{26}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(x_1, \theta_1) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} K - \omega^2(2M + m) & Kr - \omega^2 mr \\ Kr - \omega^2 mr & mgr + KrR - m\omega^2(r^2 + \frac{l^2}{12}) \end{vmatrix} \tag{27}$$