Simulazione II esonero FM210 del 18-12-14
E. Scoppola

Soluzione

1) Per il centro C del disco abbiamo:

$$x_C = R, \qquad y_C = 2R\sin\theta$$

e per il centro G dell'asta

$$x_G = R + R\cos\theta, \qquad y_G = R\sin\theta$$

da cui, applicando il teorema di König ed utilizzando la condizione di rotolamento

$$2R\cos\theta\dot{\theta} = R\dot{\phi} \text{ da cui } \dot{\phi} = 2\cos\theta\dot{\theta}$$

otteniamo per il disco:

$$T_{disco} = 3MR^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2$$

e per l'asta

$$T_{AB} = \frac{2}{3}mR^2\dot{\theta}^2$$

Per l'energia potenziale abbiamo

$$V_g = gR\sin\theta(2M+m), \qquad V_{el} = 2KR^2\sin^2\theta$$

da cui

$$\mathcal{L} = R^2\dot{\theta}^2(3M\cos^2\theta + \frac{2}{3}m) - gR\sin\theta(2M+m) - 2KR^2\sin^2\theta$$

con equazione del moto

$$2\ddot{\theta}R^2(3M\cos^2\theta+\frac{2}{3}m) = 6MR^2\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta - 4KR^2\sin\theta\cos\theta - gR\cos\theta(2M+m)$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$V'(\theta) = R\cos\theta\Big[g(2M+m) + 4KR\sin\theta\Big] = 0$$

con soluzioni:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$$

e se $\lambda := \frac{g(2M+m)}{4KR} < 1$ anche $\theta_{3,4}$ soluzioni dell'equazione $\sin\theta = -\lambda$, cioè

$$\theta_3 = -\arcsin\lambda, \quad \theta_4 = \pi + \arcsin\lambda.$$

Per studiare la stabilità basta guardare la derivata seconda, riscrivendo il potenziale in funzione del parametro λ abbiamo:

$$V(\theta) = 2KR^2 \sin\theta(\sin\theta + 2\lambda), \quad V'(\theta) = 4KR^2 \cos\theta(\sin\theta + \lambda)$$
$$V"(\theta) = -4KR^2 \sin\theta[\lambda + \sin\theta] + 4KR^2 \cos^2\theta.$$

Otteniamo per θ_1
$$V"(\theta_1) = -4KR^2[\lambda + 1] < 0$$
e dunque θ_1 è instabile. Per θ_2 abbiamo:
$$V"(\theta_2) = 4KR^2[\lambda - 1]$$
minore di zero se $\lambda < 1$ e dunque instabile, maggiore di zero se $\lambda > 1$ e dunque stabile in questo caso. Nel caso $\lambda < 1$ per i punti $\theta_{3,4}$ abbiamo
$$V"(\theta_{3,4}) = 4KR^2 \cos^2\theta_{3,4} > 0$$
e dunque questi due punti sono stabili, quando esistono. Nel caso $\lambda = 1$ otteniamo per continuità $\theta_2 = \theta_{3,4}$ stabile.

3) Nel caso $\lambda > 1$ intorno al punto θ_2 abbiamo la lagrangiana delle piccole oscillazioni:
$$\mathcal{L}_{po} = \frac{2}{3}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\theta - \frac{3\pi}{2})^2 4KR^2(\lambda - 1)$$
con pulsazioni proprie e periodi propri
$$\omega = \sqrt{\frac{3K(\lambda-1)}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3K(\lambda-1)}}.$$

4) Nel caso $\lambda \geq 1$ i dati cui fa seguito un moto periodico sono tutti tranne quelli corrispondenti a un'energia totale
$$E = T + V = R^2\dot{\theta}^2(3M\cos^2\theta + \frac{2}{3}m) + 2KR^2 \sin\theta(\sin\theta + 2\lambda)$$
uguale a $V(\frac{\pi}{2}) = 2KR^2(1 + 2\lambda)$ oppure $V(\frac{3\pi}{2}) = -2KR^2(2\lambda - 1)$. Se $\lambda < 1$ dobbiamo ulteriormente escludere i dati iniziali corrispondenti ad un'energia totale uguale a $V(\theta_{3,4}) = -2KR^2\lambda^2$.

5) La lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione si ottiene dalla lagrangiana trovata al punto 1) sottraendo il potenziale centrifugo:
$$\mathcal{L}_K = \mathcal{L} - V_{centr,disco} - V_{centr,AB}.$$
Per il disco abbiamo $V_{centr,disco}$ uguale costante, infatti
$$V_{centr,disco} = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\phi (R + r\cos\phi)^2$$
non dipende dalla variabile lagrangiana θ. Per l'asta abbiamo
$$V_{centr,AB} = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{m}{2R}\int_0^{2R} ds(R+s\cos\theta)^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 mR^2\Big[\frac{4}{3}\cos^2\theta + 2\cos\theta\Big]$$