Scritto di FM210 del 20-1-2015

Soluzione Esercizio 1

1) L'equazione del moto, di Newton, del punto materiale è

$$m\ddot{x} = -V'(x) = -\frac{1}{2}\log\frac{1+x^2}{4}$$

mentre l'energia totale è data da

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

e si conserva poiché

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + V'(x)\dot{x} = m\dot{x}\frac{-V'(x)}{m} + V'(x)\dot{x} = 0.$$

2) La funzione $\frac{x}{2}\log\frac{1+x^2}{4} + \arctan x - x$ è una funzione dispari con punti critici in $\pm\sqrt{3}$, che sono un massimo in $-\sqrt{3}$ dove la funzione vale

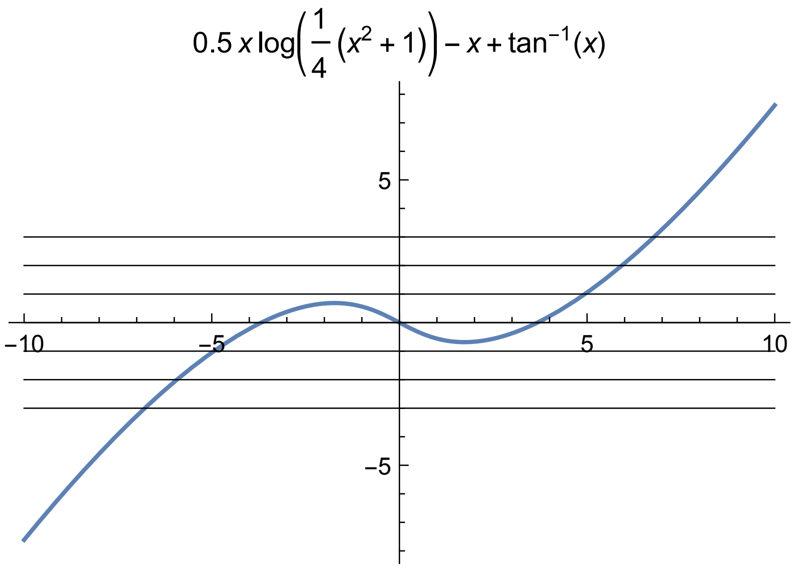
$$V(-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - \arctan\sqrt{3}$$

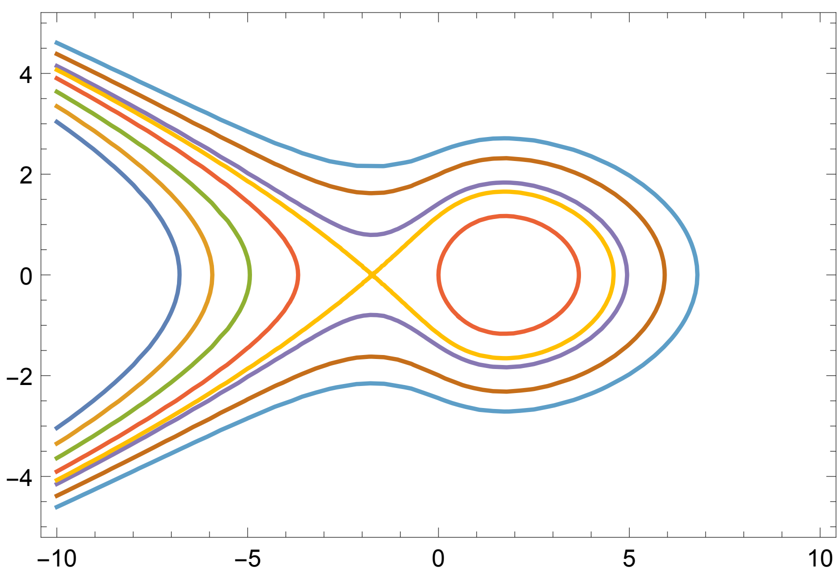
e un minimo in $\sqrt{3}$ dove la funzione vale

$$V(\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + \arctan\sqrt{3}.$$

Dunque possiamo concludere che ci sono 2 punti di equilibrio nello spazio delle fasi: $(\sqrt{3}, 0)$ che è stabile e $(-\sqrt{3}, 0)$ che è instabile.

3) Le orbite nello spazio delle fasi sono descritte dal seguente disegno





In particolare abbiamo orbite illimitate aperte per dati iniziali cui corrisponde un'energia totale $E < -\sqrt{3} + \arctan\sqrt{3}$ oppure $E > \sqrt{3} - \arctan\sqrt{3}$. Nel caso in cui $E = \sqrt{3} - \arctan\sqrt{3}$ (curva di livello gialla nel disegno) abbiamo 4 orbite: 3 orbite asintotiche di cui 2 illimitate corrispondenti a valori di $x < -\sqrt{3}$ ed una limitata, ed un orbita coincidente col punto di equilibrio instabile $(-\sqrt{3}, 0)$ (punto di incrocio nel disegno).

4) I dati iniziali cui fa seguito un moto periodico sono quelli corrispondenti ad un'energia totale $E \in (-\sqrt{3}+\arctan\sqrt{3}, \sqrt{3}-\arctan\sqrt{3})$ con $x \in [x_-, x_+]$

avendo definito $x_\pm$ le soluzioni dell'equazione $V(x) = E$, con

$$x_+ > x_- > -\sqrt{3}.$$

5) Per questi dati iniziali otteniamo per il periodo l'espressione

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}} = \sqrt{2m}\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - \frac{x}{2}\log\frac{1+x^2}{4} - \arctan x + x}}$$

Soluzione Esercizio 2

1) L'asta AB ruota intorno al suo baricentro e dunque

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\frac{2m(2l)^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{ml^2}{3}\dot\theta^2.$$

Per l'asta CD applichiamo il teorema di Koenig:

$$T_{CD} = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2(\frac{1}{4} + 2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2(\frac{1}{3} + 2\sin^2\theta)$$

Per il punto P abbiamo

$$T_P = \frac{1}{2}2m\dot y^2$$

L'energia potenziale è data da:

$$V = mg\frac{l}{2}\sin\theta + 2mgy + \frac{1}{2}K\big(l^2\cos^2\theta + (y + l\sin\theta)^2\big)$$

da cui, a meno di costanti ricaviamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2(1 + 2\sin^2\theta) + m\dot y^2 - mg\frac{l}{2}\sin\theta - 2mgy - \frac{1}{2}K(y^2 + 2yl\sin\theta)$$

con equazioni del moto:

$$2m\ddot y = -2mg - Ky - Kl\sin\theta$$

$$ml^2\ddot\theta(1 + 2\sin^2\theta) = -ml^2\dot\theta^2 2\sin\theta\cos\theta - mg\frac{l}{2}\cos\theta - Kyl\cos\theta$$

.

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2mg + Ky + Kl\sin\theta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\frac{l}{2}\cos\theta + Kly\cos\theta = 0$$

con soluzioni $(y_1,\theta_1)=(-l-\frac{2mg}{K},\frac{\pi}{2})$, $(y_2,\theta_2)=(l-\frac{2mg}{K},\frac{3}{2}\pi)$ e se $\lambda:=\frac{3mg}{2Kl}<1$ anche $(y_{3,4},\theta_{3,4})=(-\frac{mg}{2K},\arcsin(-\lambda))$.

Per studiare la stabilità calcoliamo la matrice delle derivate seconde di $V(y,\theta)$:

$$V''(y,\theta)=\begin{pmatrix} K & Kl\cos\theta \\ Kl\cos\theta & -l\sin\theta\big[\frac{mg}{2}+Ky\big] \end{pmatrix}$$

Otteniamo per (y_1,θ_1)

$$V''(y_1,\theta_1)=\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -l\big[\frac{mg}{2}-Kl-2mg\big] \end{pmatrix}$$

e dunque $(y_1,\theta_1,0,0)$ è stabile.

$$V''(y_2,\theta_2)=\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & l\big[-\frac{3mg}{2}+Kl\big] \end{pmatrix}$$

e dunque $(y_2,\theta_2,0,0)$ è stabile se $\lambda<1$ e instabile se $\lambda>1$.

Se $\lambda<1$ i per i punti $(y_{3,4},\theta_{3,4},0,0)$ abbiamo

$$V''(y_{3,4},\theta_{3,4})=\begin{pmatrix} K & Kl\cos\theta_{3,4} \\ Kl\cos\theta_{3,4} & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque $(y_{3,4},\theta_{3,4},0,0)$ sono instabili.

Usando un argomento di continuità per il caso $\lambda=1$ possiamo concludere :

> se $\lambda\geq 1$ i punti critici sono $(y_1,\theta_1,0,0)$ stabile e $(y_2,\theta_2,0,0)$ instabile;
>
> se $\lambda<1$ i punti critici sono$(y_1,\theta_1,0,0)$ e $(y_2,\theta_2,0,0)$ stabili e $(y_{3,4},\theta_{3,4},0,0)$ instabili.

3) Intorno al punto (y_1,θ_1) abbiamo la lagrangiana delle piccole oscillazioni, espressa in termini delle variabili $\mathbf{q}:=(y,\theta)$:

$$\mathcal{L}_{po}=\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}},A\dot{\mathbf{q}})-\frac{1}{2}\Big((\mathbf{q}-\mathbf{q_0}),V''(\mathbf{q_0})(\mathbf{q}-\mathbf{q_0})\Big) \tag{1}$$

con $\mathbf{q_0}=(y_1,\theta_1)$ ed

$$A=\begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 3ml^2 \end{pmatrix}$$

4) Se il piano è posto in rotazione la lagrangiana nel sistema di riferimento rotante si ottiene da quella trovata al punto 1) sottraendo il potenziale centrifugo:

$$V_{centr}=-\frac{1}{2}\omega^2\rho\Big[\int_{-l}^{l}(x\cos\theta)^2dx+\int_0^l(l+x)^2\cos^2\theta dx\Big]=-\frac{1}{2}\omega^2 ml^2 3\cos^2\theta.$$