

Soluzione del II esonero FM210 del 7-1-15

E. Scoppola

1) Per il centro C del disco abbiamo:

$$x_C = R, \quad y_C = y$$

e per il centro G dell'asta

$$x_G = R + R \cos \theta, \quad y_G = y - R \sin \theta$$

da cui, applicando il teorema di König ed utilizzando la condizione di rotolamento

$$\dot{y} = R\dot{\phi} \text{ da cui } \dot{\phi} = \frac{\dot{y}}{R}$$

otteniamo per il disco:

$$T_{disco} = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M\dot{y}^2$$

e per l'asta

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m[R^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{y}\dot{\theta}R \cos \theta] + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left[\frac{4}{3}R^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{y}\dot{\theta}R \cos \theta\right]$$

Per l'energia potenziale abbiamo

$$V_g = (M + m)gy - mgR \sin \theta, \quad V_{el} = \frac{1}{2}K(y - 2R \sin \theta)^2$$

da cui

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left[\frac{4}{3}R^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{y}\dot{\theta}R \cos \theta\right] - (M + m)gy + mgR \sin \theta - \frac{1}{2}K(y - 2R \sin \theta)^2$$

con equazioni del moto

$$\left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{y} - mR\ddot{\theta} \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 \sin \theta = -(M + m)g - K(y - 2R \sin \theta)$$

$$\frac{4}{3}mR^2\ddot{\theta} - mR\ddot{y} \cos \theta = mgR \cos \theta + 2KR \cos \theta(y - 2R \sin \theta)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti nello spazio delle fasi che corrispondono ai punti critici del potenziale con velocità nulla. Per trovare i punti critici poniamo:

$$\frac{\partial V(y, \theta)}{\partial y} = (M + m)g + Ky - 2KR \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V(y, \theta)}{\partial \theta} = R \cos \theta \left[-mg + 4KR \sin \theta - 2Ky \right] = 0 \quad (2)$$

Poiché quando è verificata l'equazione (1) la parentesi quadra in (2) è sempre positiva e vale $(2M + m)g$, abbiamo solo da considerare gli zeri del coseno e usando la relazione $y = 2R \sin \theta - \frac{(M+m)g}{K}$ otteniamo i punti critici:

$$(y_1, \theta_1) = \left(2R - \frac{(M+m)g}{K}, \frac{\pi}{2} \right), \quad (y_2, \theta_2) = \left(-2R - \frac{(M+m)g}{K}, \frac{3\pi}{2} \right).$$

Per studiare la stabilità basta valutare la matrice delle derivate seconde per determinare se questi punti critici sono massimi o minimi del potenziale:

$$V''(y, \theta) = \begin{pmatrix} K & -2KR \cos \theta \\ -2KR \cos \theta & -R \sin \theta \left[-mg + 4KR \sin \theta - 2Ky \right] + 4KR^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

Otteniamo per (y_1, θ_1)

$$V''(y_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -Rg(2M+m) \end{pmatrix}$$

e dunque $(y_1, \theta_1, 0, 0)$ è instabile. Per (y_2, θ_2) abbiamo:

$$V''(y_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & Rg(2M+m) \end{pmatrix}$$

e dunque $(y_2, \theta_2, 0, 0)$ è stabile.

- 3) Intorno al punto (y_2, θ_2) abbiamo la lagrangiana delle piccole oscillazioni, espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y, \theta)$:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), V''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)) \quad (3)$$

con $\mathbf{q}_0 = (y_2, \theta_2)$ ed

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M + m & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}mR^2 \end{pmatrix}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(y_2, \theta_2) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} K - \omega^2(\frac{3}{2}M + m) & 0 \\ 0 & Rg(2M+m) - \omega^2 \frac{4}{3}mR^2 \end{vmatrix}$$

da cui $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{\frac{3}{2}M + m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{3g(2M+m)}{4mR}}$ e dunque periodi

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}M + m}{K}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{4mR}{3g(2M+m)}}$$

- 4) La lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione si ottiene dalla lagrangiana trovata al punto 1) sottraendo il potenziale centrifugo:

$$\mathcal{L}_K = \mathcal{L} - V_{centr,disco} - V_{centr,AB}.$$

Per il disco abbiamo $V_{centr,disco}$ costante, infatti

$$V_{centr,disco} = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\phi (R + r \cos \phi)^2$$

che non dipende dalle variabili lagrangiane y e θ . Per l'asta abbiamo

$$V_{centr,AB} = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{m}{2R} \int_0^{2R} ds (R+s \cos \theta)^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 m R^2 \left[\frac{4}{3} \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \right] + cost$$