**Scritto di FM210 del 8-9-15**

E. Scoppola

## Soluzione Esercizio 2

1) L'equazione del moto è:

$$\ddot{x} = 2x^{-7}\big(3 - 4x^2 + x^4\big)$$

e l'energia totale:

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x^{-6}\big(1 - x^2\big)^2$$

L'energia potenziale è una funzione pari, non negativa, con zeri in $\pm 1$ e punti critici $\pm 1$, minimi, e $\pm\sqrt{3}$, massimi, della forma riportata nella seguente figura.

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale e dunque ai seguenti quattro punti dello spazio delle fasi:

   $(\pm 1, 0)$ punti di equilibrio stabile

   $(\pm\sqrt{3}, 0)$ punti di equilibrio instabile

3) Si ha moto periodico per dati iniziali con $x(0) \in (-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$ e con un'energia totale $E < V(\sqrt{3}) = \frac{4}{27}$.

4) Si hanno moti limitati e aperiodici per $x(0) \in [-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$ ed $E = \frac{4}{27}$.

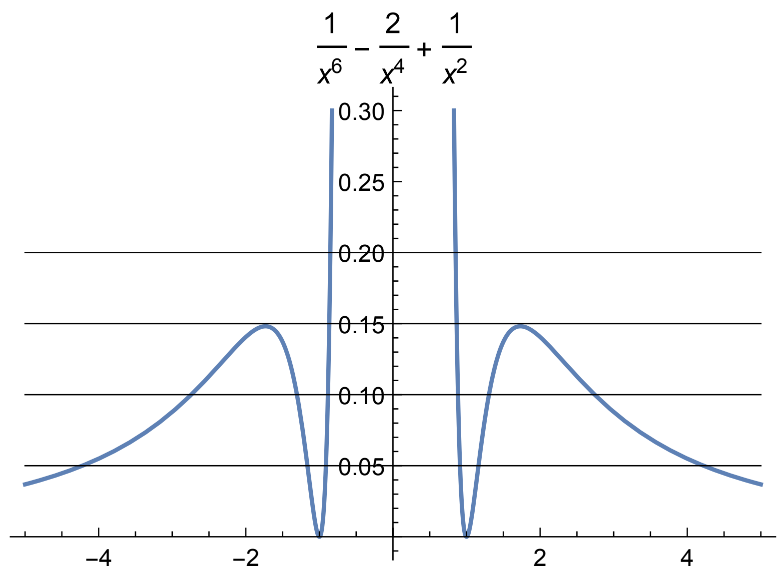
5) Si hanno moti aperti per

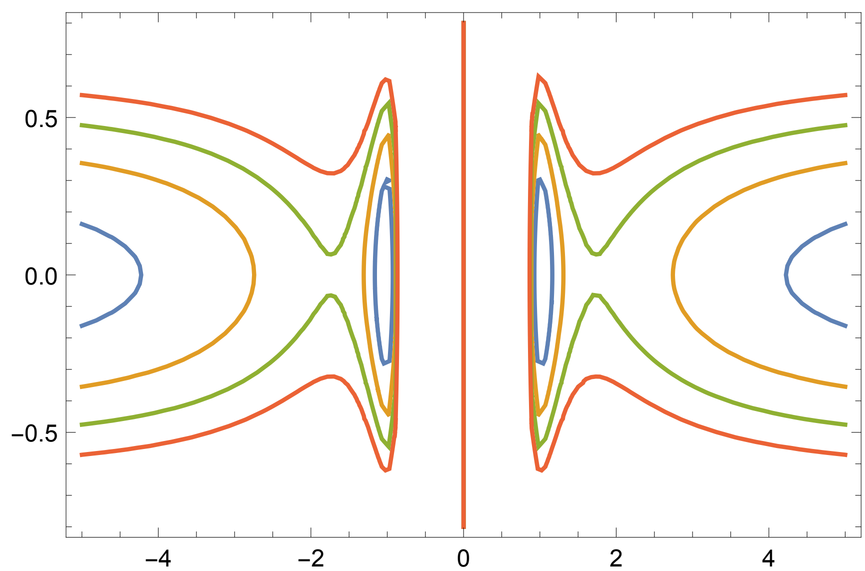
   $E \leq \frac{4}{27}$ ed $|x(0)| > \sqrt{3}$

   oppure

   $E > \frac{4}{27}$.

   Questi moti aperti sono definiti globalmente perché il potenziale è limitato dal basso.


$\frac{1}{x^6} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^2}$
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
−4
−2
2
4


0.5
0.0
−0.5
−4
−2
0
2
4

**Soluzione Esercizio 2**

1) Le coordinate del centro del disco sono

$$x_C = (R+r)\sin\theta, \qquad y_C = -(R+r)\cos\theta$$

e la condizione di puro rotolamento è data da:

$$(R+r)\dot{\theta} = r\dot{\phi}$$

avendo indicato con $\dot{\phi}$ la velocità angolare con cui il disco ruota attorno al suo centro. Dal teorema di Koenig abbiamo per l'energia cinetica del disco:

$$T_d = \frac{1}{2}M(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}M(R+r)^2\frac{3}{2}\dot{\theta}^2$$

e dunque l'energia cinetica totale è:

$$T = \frac{1}{2}M(R+r)^2\frac{3}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

L'energia potenziale, a meno di termini costanti, è data da:

$$V = -Mg(R+r)\cos\theta + mgy + \frac{1}{2}K\Big[y^2 + 2(R+r)y\cos\theta\Big]$$

definendo per brevita' $\rho := R+r$, otteniamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\rho^2\frac{3}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + Mg\rho\cos\theta - mgy - \frac{1}{2}K\Big[y^2 + 2\rho y\cos\theta\Big]$$

con equazioni del moto:

$$\frac{3}{2}M\rho\ddot{\theta} = -Mg\rho\sin\theta + K\rho y\sin\theta$$

$$m\ddot{y} = -mg - Ky - K\rho\cos\theta.$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale soluzioni di

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = \rho\sin\theta\big[Mg - Ky\big] = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = Ky + mg + K\rho\cos\theta = 0$$

da cui otteniamo i seguenti punti critici:

$$(\theta_1, y_1) = (0, -\frac{mg}{K} - \rho), \quad (\theta_2, y_2) = (\pi, -\frac{mg}{K} + \rho)$$

e se $\lambda := \frac{(M+m)g}{K\rho} < 1$ anche i punti

$$(\theta_{3,4}, y_{3,4}) = (\arccos -\lambda, \frac{Mg}{K}).$$

Per discutere la stabilità valutiamo la matrice hessiana di $V$:

$$V''(\theta, y) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta[Mg - Ky] & -K\rho\sin\theta \\ -K\rho\sin\theta & K \end{pmatrix} \tag{1}$$

nei diversi punti critici. Otteniamo

$$V''(\theta_1, y_1) = \begin{pmatrix} \rho[(M+m)g + K\rho] & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{2}$$

e dunque il punto è stabile sempre. Per il punto $(\theta_2, y_2)$ otteniamo

$$V''(\theta_2, y_2) = \begin{pmatrix} -\rho[(M+m)g - K\rho] & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{3}$$

instabile per $\lambda > 1$ e stabile per $\lambda < 1$. Nel caso $\lambda < 1$ per i punti $(\theta_{3,4}, y_{3,4})$ otteniamo

$$V''(\theta_{3,4}, y_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & -K\rho\sin\theta_{3,4} \\ -K\rho\sin\theta_{3,4} & K \end{pmatrix} \tag{4}$$

che ha determinante negativo e dunque questi punti sono instabili quando esistono. Per continuità otteniamo che per $\lambda = 1$ il punto $(\theta_2, y_2)$ è instabile.

3) Intorno al punto $\mathbf{q}_0 = (\theta_1, y_1)$, che è stabile, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (\theta, y)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), V''(\mathbf{q}_0))(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)) \tag{5}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M\rho^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \tag{6}$$

Le pulsazioni proprie delle piccole oscillazioni si ottengono dall'equazione

$$det\big(V\text{"}(\mathbf{q}_0) - \omega^2 A\big) = 0$$

e dunque

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(M+m)g + K\rho}{\frac{3}{2}M\rho}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

4) Nel riferimento solidale con $\Pi$ la nuova lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \mathcal{L} - V_{centr}$$

con

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 M\rho^2 \sin^2\theta$$