Scritto di FM210 del 9-6-2015

Soluzione Esercizio 1

1) L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = 2\cos x \sin x - a\cos x$$

e l'energia totale è data dall'espressione

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \cos^2 x + a\sin x$$

2) Per studiare qualitativamente il moto si studia il potenziale $V(x)$: esso è definito da una funzione periodica di periodo 2π dipendente dal parametro a, che studiamo dunque nell'intervallo $[0, 2\pi)$.

$$V'(x) = \cos x\Big(a - 2\sin x\Big)$$

e dunque i punti critici del potenziale sono $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$ e, se vale $a < 2$, anche i punti $x_{3,4} = \arcsin\frac{a}{2}$.

$$V\text{''}(x) = -\sin x\Big(a - 2\sin x\Big) - 2\cos^2 x$$

e dunque $V\text{''}(x_1) = -(a-2) < 0$ se $a > 2$, mentre $V\text{''}(x_1) > 0$ se $a < 2$ e nel caso $a = 2$ abbiamo $V\text{''}(x_2) = 0$; $V\text{''}(x_2) = a + 2 > 0$ sempre; se poi $a < 2$ valutiamo $V\text{''}(x_{3,4}) = -2\cos^2 x_{3,4} < 0$. Per la stabilità, anche nel caso $a = 2$ con un argomento di continuità o valutando le derivate successive, possiamo dunque concludere che:

se $a < 2$ i punti di equilibrio nello spazio delle fasi sono: $(x_1, 0)$ stabile; $(x_2, 0)$ stabile; $(x_{3,4}, 0)$ instabili;

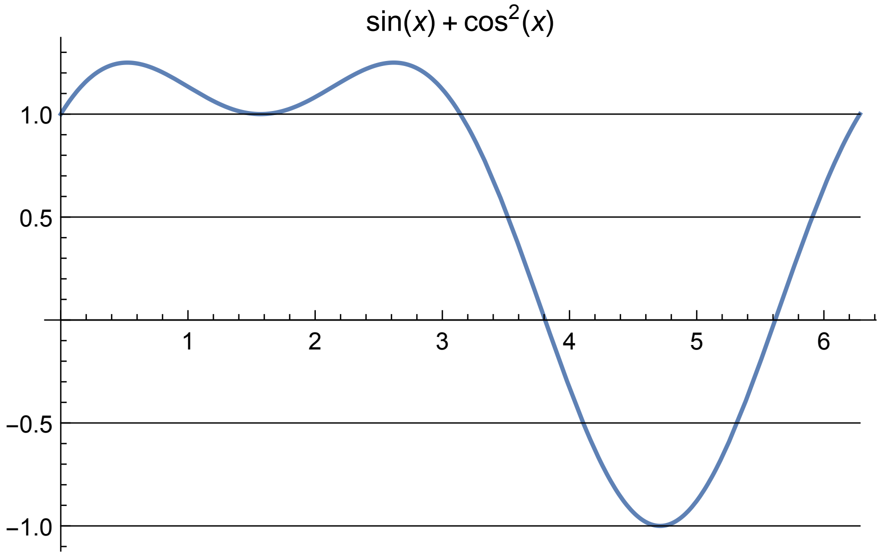
se $a \geq 2$ i punti di equilibrio nello spazio delle fasi sono: $(x_1, 0)$ instabile; $(x_2, 0)$ stabile;

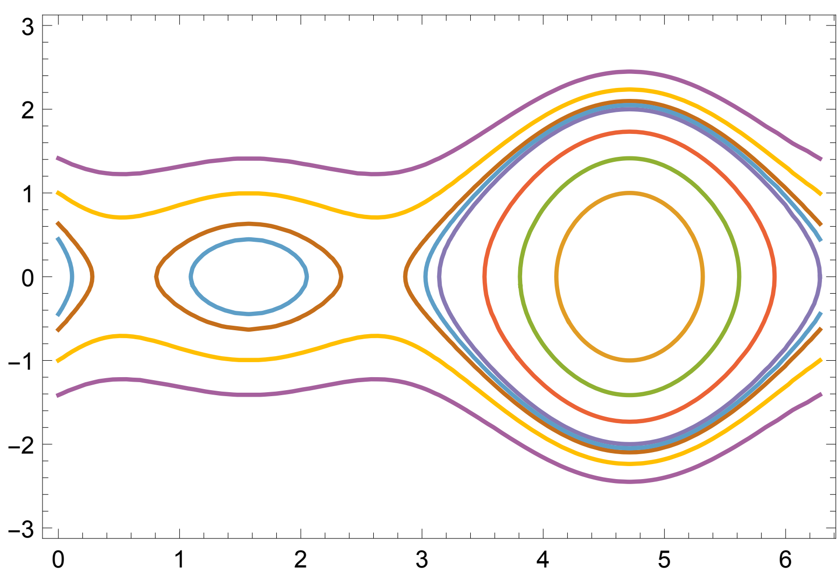
3) Anche per discutere la periodiciá del moto dobbiamo distinguere i due casi $a < 2$ e $a \geq 2$

se $a < 2$ il moto è periodico per dati iniziali $x(0), \dot{x}(0)$ corrispondenti ad una energia totale E che assume valore negli intervalli $(V(x_2), V(x_1)) \cup (V(x_1), V(x_{3,4}) \cup (V(x_{3,4}), +\infty)$ e utilizzando che $V(x_1) = a$, $V(x_2) = -a$ e $V(x_{3,4}) = 1 + \frac{a^2}{4} > a$ otteniamo dunque la condizione

$$E \in (-a, a) \cup (a, 1 + \frac{a^2}{4}) \cup (1 + \frac{a^2}{4}, +\infty).$$

A questi va aggiunto il moto periodico corrispondente al valore di energia $E = a$ con $x(0) \neq \pi/2$. I moti sono di oscillazione per $E < 1 + \frac{a^2}{4}$ e di rotazione per $E > 1 + \frac{a^2}{4}$

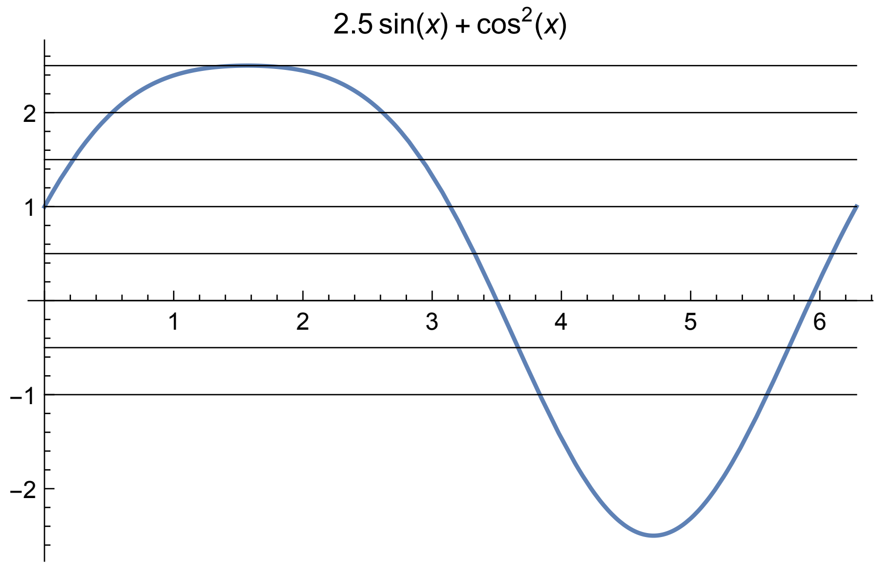


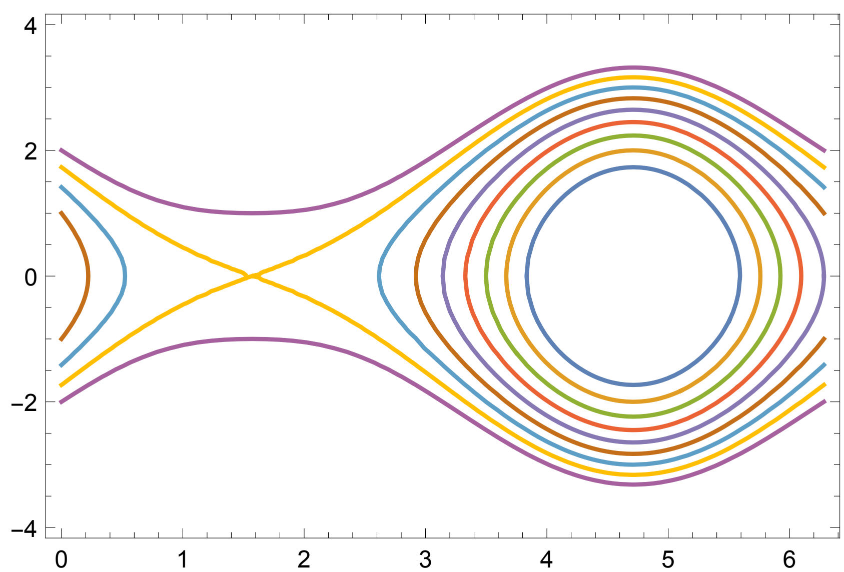


se $a \geq 2$ il moto è periodico per dati iniziali $x(0), \dot{x}(0)$ corrispondenti ad una energia totale E tale che

$$E \in (-a, a) \cup (a, +\infty)$$

I moti sono di oscillazione per $E < a$ e di rotazione per $E > a$.





4) nel caso $a = 1$ e $x(0) = x_1 = \frac{\pi}{2}$ abbiamo moto oscillatorio se $E \in (V(x_1), V(x_{3,4}))$ cioè $E \in (1, \frac{5}{4})$ e dunque per $|\dot{x}(0)| = \sqrt{2(E - V(x(0)))} \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; abbiamo invece moto di rotazione se $E \in (V(x_{3,4}, +\infty)$ e dunque per $|\dot{x}(0)| \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$.

5) Sempre nel caso $a = 1$ con dati iniziali tali che $E = 1$ abbiamo moto periodico tra x_- e x_+ soluzioni di $V(x) = 1$ diverse da x_1, e dunque

$x_- = \pi$, $x_+ = 2\pi$ da cui ricaviamo il periodo del moto oscillatorio

$$T = 2\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2(\sin^2 x - \sin x)}}.$$

Soluzione Esercizio 2

1) Abbiamo

$$x_C = r\cos\theta, \qquad y_C = r\sin\theta, \qquad \text{con } r = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$$

e dunque, dal teorema di Konig, l'energia cinetica della sbarra è

$$T_{AB} = \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\Big(R^2 - \frac{l^2}{6}\Big)$$

Per il punto P abbiamo banalmente

$$T_P = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

L'energia potenziale è

$$V = Mgr\sin\theta + mgy + \frac{1}{2}K\Big[r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - y)^2\Big] =$$

$$Mgr\sin\theta + mgy + \frac{1}{2}K\Big[y^2 - 2yr\sin\theta\Big] + cost$$

e quindi otteniamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\Big(R^2 - \frac{l^2}{6}\Big) + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - Mgr\sin\theta - mgy - \frac{1}{2}K\Big[y^2 - 2yr\sin\theta\Big] \quad (1)$$

Le equazioni del moto sono:

$$m\ddot{y} = -mg - Ky + Kr\sin\theta \qquad (2)$$

$$M\ddot{\theta}\Big(R^2 - \frac{l^2}{6}\Big) = -Mgr\cos\theta + Kyr\cos\theta \qquad (3)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale associati ad una velocità nulla:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg + Ky - Kr\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \cos\theta\Big(Mgr - Kyr\Big) = 0 \qquad (5)$$

da cui otteniamo i punti di critici

$$(y_1, \theta_1) = (r - \frac{mg}{K}, \frac{\pi}{2}); \quad (y_2, \theta_2) = (-r - \frac{mg}{K}, \frac{3}{2}\pi)$$

e se $\lambda := \frac{(m+M)g}{Kr} < 1$ anche i punti

$$(\frac{Mg}{K}, \theta_3); \quad (\frac{Mg}{K}, \theta_4) \quad \text{con } \theta_{3,4} = \arcsin \lambda.$$

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(y, \theta) = \begin{pmatrix} K & -Kr\cos\theta \\ -Kr\cos\theta & -\sin\theta\Big(Mgr - Kyr\Big) \end{pmatrix} \tag{6}$$

nei diversi punti critici, ottenendo:

$$V''(y_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -\Big((M+m)gr - Kr^2\Big) \end{pmatrix} \tag{7}$$

che ha autovalori positivi se $\lambda < 1$, dunque il punto (x_1, θ_1) in questo caso è un minimo del potenziale mentre è una sella se $\lambda > 1$.

$$V''(y_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \Big((M+m)gr + Kr^2\Big) \end{pmatrix} \tag{8}$$

che ha autovalori positivi sempre e dunque (y_2, θ_2) è un minimo.

Per $\lambda < 1$ consideriamo anche

$$V''(\frac{MG}{K}, \theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} K & -Kr\cos\theta_{3,4} \\ -Kr\cos\theta_{3,4} & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

che ha determinante negativo e dunque quando esistono i punti $(\frac{MG}{K}, \theta_{3,4})$ sono selle.

Con un argomento di continuità per il caso $\lambda = 1$ possiamo concludere per i punti di equilibrio nello spazio delle fasi:

se $\lambda \geq 1$:

$$(r - \frac{mg}{K}, \frac{\pi}{2}, 0, 0) \quad \text{instabile}$$

$$(-r - \frac{mg}{K}, \frac{3}{2}\pi, 0, 0) \quad \text{stabile}$$

se $\lambda < 1$:

$$(r - \frac{mg}{K}, \frac{\pi}{2}, 0, 0) \quad \text{stabile}$$

$$(-r - \frac{mg}{K}, \frac{3}{2}\pi, 0, 0) \quad \text{stabile}$$

$$(\frac{MG}{K}, \theta_{3,4}, 0, 0) \quad \text{instabili.}$$

3) Intorno al punto di equilibrio stabile corrispondente a (y_2, θ_2), la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y, \theta)$, con $\mathbf{q_0} := (y_2, \theta_2)$è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q} - \mathbf{q_0}), V''(y_2, \theta_2)(\mathbf{q} - \mathbf{q_0})) \tag{10}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & M\Big(R^2 - \frac{l^2}{6}\Big) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''((y_2, \theta_2) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} K - \omega^2 m & 0 \\ 0 & \Big((M+m)gr + Kr^2\Big) - \omega^2 M\Big(R^2 - \frac{l^2}{6}\Big) \end{vmatrix} \tag{12}$$

e dunque otteniamo

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\Big((M+m)gr + Kr^2\Big)}{M\Big(R^2 - \frac{l^2}{6}\Big)}}$$

4) Se il piano è posto in rotazione attorno all'asse verticale la lagrangiana nel sistema di riferimento in moto si ottiene da quella ottenuta nell'equazione (1) sottraendo il potenziale centrifugo dell'asta

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} ds(r\cos\theta + s\sin\theta)^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 M\Big(r^2\cos^2\theta + \frac{l^2}{12}\sin^2\theta\Big)$$