

**ASPETTI QUALITATIVI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI
DIFFERENZIALI**

(Schema del contenuto delle lezioni e riferimenti bibliografici)

Testi

- [HS] M. Hirsch and S. Smale ” Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra” Academic Press (1974)
- [G] Guido Gentile, “Introduzione ai sistemi dinamici - Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni” dispense in rete.

1 Punti di equilibrio e stabilità: definizioni

Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione C^1 , e $t \in \mathbb{R}$. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} := \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

e denotiamo con $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ la sua *soluzione con dato iniziale* \mathbf{x}_0 cioè la funzione che soddisfa $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ per ogni t , con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ (Vd per esempio [HS] cap.8 per la teoria generale delle equazioni differenziali, esistenza e unicità delle soluzioni, dipendenza continua dai dati iniziali oppure [G] cap 3). Denoteremo questa soluzione anche con $\Phi_t \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}(t)$ per mettere in evidenza la sua dipendenza dal dato iniziale.

Definizione

Un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ è un *punto di equilibrio* di (1) se $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Se \mathbf{x}_0 è un punto di equilibrio allora chiaramente la funzione costante $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ è una soluzione di (1) con dato iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Definizione

Un punto di equilibrio \mathbf{x}_0 è *stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni \mathbf{x} tale che $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ abbiamo che $|\Phi_t \mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon$ per ogni $t \geq 0$. Denotando con $B_r(\mathbf{x}_0)$ un intorno di raggio r del punto \mathbf{x}_0 , questo equivale a dire che le soluzioni che partono da $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ restano in $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ per ogni tempo $t \geq 0$.

Un punto di equilibrio \mathbf{x}_0 è *instabile* se non è stabile.

Un punto di equilibrio \mathbf{x}_0 è *asintoticamente stabile* se è stabile e inoltre per ogni $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ vale $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_t \mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = 0$.

Per esempi vd. [HS] cap. 9 oppure [G] cap. 4 e 5.

2 Il caso lineare

Nel caso lineare, cioè quando $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con A matrice $n \times n$, l'equazione (1) si risolve esattamente $\Phi_t \mathbf{x} = e^{tA} \mathbf{x}$ (vd. per es [HS] cap. 5). L'origine $\mathbf{0}$ è un punto di equilibrio la cui stabilità è legata al segno della parte reale degli autovalori della matrice A dal seguente risultato:

Theorem 2.1 *Se per ogni autovalore λ_i della matrice A vale che $\operatorname{Re}\lambda_i < -b$ con $b > 0$ allora il flusso $\Phi_t = e^{tA}$ è una contrazione:*

$$|\Phi_t \mathbf{x}| < e^{-tb} |\mathbf{x}|$$

per ogni $t > 0$ e per ogni \mathbf{x} e dunque $\mathbf{0}$ è asintoticamente stabile.

Se esiste un autovalore λ_i della matrice A tale che $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ allora $\mathbf{0}$ è instabile.

(Vd. [HS] cap 7, (dimostrazione solo della contrazione))

3 Approssimazione lineare

Nel caso generale $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, sia \mathbf{x}_0 un punto di equilibrio, si può considerare l'approssimazione lineare del campo di velocità \mathbf{f} intorno al punto \mathbf{x}_0 :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

con $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ la matrice delle derivate di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0 (o *matrice di linearizzazione*) cioè:

$$\left(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \right)_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0}$$

ed \mathbf{R} il resto per cui vale:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|\mathbf{R}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

L'equazione linearizzata diventa:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \text{con } A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

Vale il seguente risultato:

Theorem 3.1 *Sia \mathbf{x}_0 un punto di equilibrio di $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, e sia $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ la matrice di linearizzazione di \mathbf{f} intorno al punto \mathbf{x}_0 . Se per ogni autovalore λ_i della matrice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ vale che $\operatorname{Re}\lambda_i < -b$ con $b > 0$ allora il flusso Φ_t è una contrazione in un opportuno intorno U di \mathbf{x}_0 , cioè esiste una costante $C > 0$ tale che :*

$$\forall \mathbf{x} \in U : \quad \Phi_t \mathbf{x} \in U \quad e \quad |\Phi_t \mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < C e^{-t\frac{b}{2}} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$$

per ogni $t > 0$ e dunque \mathbf{x}_0 è asintoticamente stabile.

Se esiste un autovalore λ_i della matrice $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ tale che $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ allora \mathbf{x}_0 è instabile.

(vd [HS] cap 9 e in particolare i teoremi di pg 181 e pg 197 (senza dimostrazione) oppure [G] cap. 4 pg 133)

4 Teorema di Liapunov

Nel caso in cui non si può applicare il precedente risultato, la stabilità può essere studiata con l'uso del teorema di Liapunov.

Definizione

Data una funzione $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ almeno C^1 ed il sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, si definisce *derivata sostanziale* di W l'espressione

$$\dot{W} \equiv \frac{dW}{dt} := \frac{d}{dt}W(\mathbf{x}(t)) = (\nabla W, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}(t)).$$

Se $\dot{W} = 0$ allora la quantità W è una *costante del moto* o *integrale primo*.

Definizione

Dato un sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, ed un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definiamo l'*insieme ω -limite* di \mathbf{x} :

$$L_\omega(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \text{esiste una successione infinita crescente } t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots \text{ tale che } \lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi_{t_k} \mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0\}$$

Definizione

Dato un sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, sia \mathbf{x}_0 un suo punto di equilibrio. Se esiste un intorno $B(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ di \mathbf{x}_0 ed una funzione $W : B(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ che sia C^1 e tale che

- i) $W(\mathbf{x}_0) = 0$ e $W(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0) \setminus \mathbf{x}_0$
- ii) $\dot{W}(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0)$

allora la funzione W è una *funzione di Liapunov* per \mathbf{x}_0 .

Se alla condizione ii) si sostituisce la condizione

- ii') $\dot{W}(\mathbf{x}) < 0$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0) \setminus \mathbf{x}_0$

allora la funzione W è una *funzione di Liapunov stretta* per \mathbf{x}_0 .

Theorem 4.1 *Dato un sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, sia \mathbf{x}_0 un suo punto di equilibrio. Se esiste un intorno $B(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$ di \mathbf{x}_0 ed una funzione di Liapunov per \mathbf{x}_0 allora \mathbf{x}_0 è un punto di equilibrio stabile. Se la funzione di Liapunov è stretta allora \mathbf{x}_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

Vd. esempi e dimostrazione in [HS] pg.193-195 e [G] cap. 4 sez 18.

5 Esempio

Si consideri un sistema meccanico unidimensionale, cioè un punto materiale in una dimensione soggetto ad una forza $F(x) = -V'(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. L'equazione del moto del punto può essere scritta nello spazio delle fasi nella forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{V'(x)}{m}\end{aligned}$$

dove un punto dello spazio delle fasi (x, v) può essere denotato equivalentemente con (x, \dot{x}) . I punti di equilibrio sono i punti dello spazio fasi $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico di V , cioè tale che $V'(x_0) = 0$.

La matrice di linearizzazione di questo sistema dinamico intorno al punto $(x_0, 0)$ è data da

$$Df(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{V''(x_0)}{m} & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Se x_0 è un punto di massimo della funzione $V(x)$ con $V''(x_0) < 0$ allora la matrice di linearizzazione $Df(x_0, 0)$ ha autovalori reali di segno opposto e dunque un autovalore strettamente positivo e dunque il punto di equilibrio è instabile. Se x_0 è un punto di minimo della funzione $V(x)$ con $V''(x_0) > 0$ allora $Df(x_0, 0)$ ha autovalori immaginari puri e dunque non si può concludere nulla da essa sulla stabilità del punto $(x_0, 0)$. Se si definisce la funzione energia totale sullo spazio delle fasi:

$$H(x, v) := \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \quad (4)$$

è immediato verificare che la sua derivata sostanziale è nulla:

$$\dot{H}(x, v) = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} = V'(x)v + mv\left(-\frac{V'(x)}{m}\right) = 0 \quad (5)$$

dunque l'energia totale è una quantità conservata.

Se x_0 è un punto di minimo isolato della funzione $V(x)$ allora la funzione

$$W(x, v) = H(x, v) - V(x_0) \tag{6}$$

è una funzione di Liapunov in un opportuno intorno di x_0 . Dal teorema di Liapunov si può dunque concludere che il punto $(x_0, 0)$ è stabile.

Osservazione

L'esempio che abbiamo considerato in una dimensione può essere considerato anche in più dimensioni per forze conservative e tutte le dimostrazioni delle affermazioni fatte possono essere immediatamente estese al caso multidimensionale. In particolare come corollario del teorema di Liapunov e conseguenza della conservazione dell'energia totale del sistema si ottiene:

Theorem 5.1 *(di Lagrange) In un sistema conservativo i punti di minimo isolati dell'energia potenziale corrispondono a punti di equilibrio stabile.*