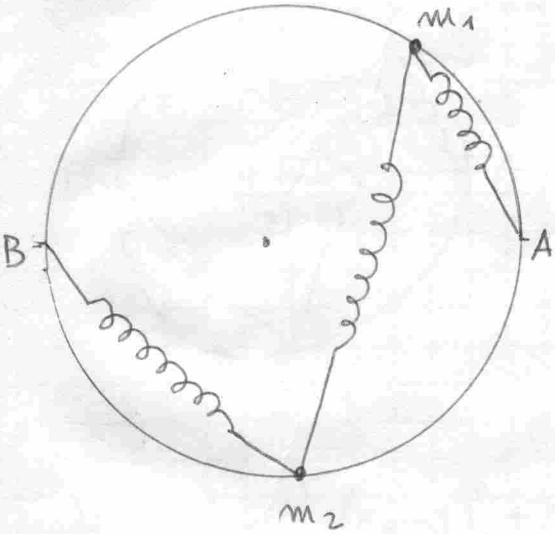
12-5-95

II ESONERO DI MECCANICA RAZIONALE

Esercizio 1



Due punti materiali di masse m_1 e m_2 scorrono senza attrito su una circonferenza posta su un piano orizzontale di raggio unitario, essi sono connessi con due molle rispettivamente ai punti A e B sulla circonferenza con $\varphi_A = 0$ $\varphi_B = \pi$ e con una terza molla tra loro. Le tre molle hanno costante di richiamo uguale ad uno e lunghezza a riposo nulla.

1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto del sistema
2) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità
3) Determinare la lagrangiana di piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio stabile e calcolare le frequenze proprie.

Esercizio 2

Studiare il moto di un oscillatore armonico in una dimensione di massa unitaria e costante $k=8$, senza attrito e soggetto a un termine forzante $(\cos\sqrt{2}t)^2$.

$$\ddot{x} + 8x = (\cos\sqrt{2}t)^2$$

(1

$x_1 = \cos\varphi_1$ $\qquad$ $x_2 = \cos\varphi_2$

$y_1 = \sin\varphi_1$ $\qquad$ $y_2 = \sin\varphi_2$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}\left[(\cos\varphi_1 - 1)^2 + \sin^2\varphi_1\right] + \frac{1}{2}\left[(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)^2 + \right.$$

$$\left. + (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\cos\varphi_2 + 1)^2 + \sin^2\varphi_2\right]$$

$$= \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cancel{\text{cost}}$$

Vincoli fissi olonomi bilateri $\Rightarrow$

pti equilibrio $= (\underline{q}_0, 0)$ con

$\underline{q}_0$ pti critici di $V(\underline{q})$ con $\underline{q}$

$\underline{q} = (\varphi_1, \varphi_2)$

Cerco i pti critici di V :

$$\bar{V} = \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = \sin\varphi_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = -\sin\varphi_2 - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = -\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

a) $\varphi_1 = \varphi_2 \quad \begin{cases} (0,0) \\ (\pi,\pi) \end{cases}$

b) $\varphi_2 = \pi - \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 2\varphi_1 - \pi$

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin(2\varphi_1 - \pi) = -\sin 2\varphi_1 = -2\sin\varphi_1\cos\varphi_1$$

$$\sin\varphi_1\left[1 - 2\cos\varphi_1\right] = 0 \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

$$\varphi_1 = 0, \pi$$

da cui i punti di equilibrio:

$$(0,\pi), \ (\pi,0), \ \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right), \ \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$$

In alternativa equivalente:

$$\varphi_1 = \pi - \varphi_2 \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \pi - 2\varphi_2 \qquad \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin 2\varphi_2$$

$$-\sin\varphi_2\,(1 + 2\cos\varphi_2) = 0 \qquad \varphi_2 = 0, \pi$$

$$\varphi_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi \\ \frac{4}{3}\pi \end{cases}$$

da cui gli stessi punti di equilibrio trovati sopra.

3

Studio della stabilità:
Per determinare se i pti critici trovati sono max o min/selle studio segno autovalori di:

$$V''(\varphi_1,\varphi_2)=\begin{pmatrix} \cos\varphi_1+\cos(\varphi_1-\varphi_2) & -\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_1-\varphi_2) & -\cos\varphi_2+\cos(\varphi_1-\varphi_2) \end{pmatrix}$$

Da cui:

$$V''(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det<0 \Rightarrow \text{inst.}$$

$$V''(\pi,\pi)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det<0 \Rightarrow \text{inst.}$$

$$V''(0,\pi)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det<0 \Rightarrow \text{inst}$$

$$V''(\pi,0)=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{tr}<0 \Rightarrow \text{inst}$$

$$V''\left(\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\det>0\\ \mathrm{tr}>0\end{matrix} \Rightarrow \text{stabile}$$

$$V''\left(\frac{5}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad " \Rightarrow \text{stabile}$$

Piccole oscillazioni

$\mathcal{L}_{po}$ ritorno a $\underline{q}_0 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right)$

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \qquad V''(q_0) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{q} = (\varphi_1, \varphi_2)$$

$$\mathcal{L}_{p.o} = \frac{1}{2}(\dot{\underline{q}}, A\dot{\underline{q}}) - \frac{1}{2}(\underline{q} - \underline{q}_0, V''(\underline{q}_0)(\underline{q} - \underline{q}_0)) =$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2}\left[\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\varphi_2 - \frac{2}{3}\pi\right)^2 - \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{3}\right)\left(\varphi_2 - \frac{2\pi}{3}\right)\right.$$

$$\det(V''(q_0) - \omega^2 A) = \begin{vmatrix} 1 - \omega^2 m_1 & -1/2 \\ -\frac{1}{2} & 1 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \omega^2 m_1)(1 - \omega^2 m_2) - \frac{1}{4} = 0$$

da cui

$$\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 (m_1 + m_2) + \frac{3}{4} = 0$$

$$\omega^2_{1,2} = \frac{m_1 + m_2 \pm \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 3 m_1 m_2}}{2 m_1 m_2}$$

ben definiti perché: $(m_1 + m_2)^2 - 3 m_1 m_2$

$$= m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2 > (m_1 - m_2)^2 > 0$$