

FORMALISMO LAGRANGIANO PER SISTEMI VINCOLATI

(Schema del contenuto delle lezioni e riferimenti bibliografici)

1. Vincoli e principio di D'Alembert

(vd. Fasano Marmi cap 1 (o anche Dell'Antonio cap. 6, o Olivieri cap 11))

Consideriamo un sistema di N punti materiali in \mathbf{R}^3 . Lo stato del sistema è descritto da un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{3N}$ (spazio delle configurazioni). Denotiamo con $\dot{\mathbf{x}}$ il vettore delle velocità.

Definizione

Un **vincolo** è una relazione a priori

$$G(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \geq 0$$

Se $G(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = 0$ il vincolo si dice **bilatero**.

Se $G(\mathbf{x}, t)$ non dipende da $\dot{\mathbf{x}}$ il vincolo si dice **olonomo**. Un vincolo non olonomo si dice **anolonomo**.

Se $G(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ non dipende da t il vincolo si dice **fisso**.

Esempi

1) Un punto materiale in \mathbf{R}^2 vincolato ad una curva regolare:

$$\mathcal{C} = \{(x, y); G(x, y) = 0\}$$

o analogamente in rappresentazione parametrica

$$\mathcal{C} = \{(x, y); x = x(s), y = y(s)\}$$

Ad esempio, un punto materiale vincolato ad una circonferenza di raggio R ha equazione di vincolo:

$$G(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

o analogamente equazioni parametriche:

$$\begin{aligned} x &= R \cos s \\ y &= R \sin s \end{aligned}$$

Ricordiamo che il vettore $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ è tangente alla curva ed è ortogonale al vettore ∇G .

2) Un punto materiale in \mathbf{R}^3 vincolato ad una superficie regolare:

$$\Sigma = \{(x, y, z); G(x, y, z) = 0\}$$

o in rappresentazione parametrica:

$$\Sigma = \{(x, y, z); x = x(q_1, q_2), y = y(q_1, q_2), z = z(q_1, q_2)\}$$

Anche in questo caso i vettori $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_2}$ sono tangenti alla superficie e ortogonali a ∇G . (vd. FM pg 3-5, 20-27)

Consideriamo il nostro sistema di N punti materiali soggetto a M vincoli olonomi bilateri:

$$G_m(\mathbf{x}, t) = 0 \quad m = 1, \dots, M \quad (1)$$

che soddisfano le seguenti ipotesi:

Hp

le funzioni G_m sono funzioni C^1 , con $\nabla G_m \neq 0$ dove vale (1), e indipendenti nel senso che: $\sum_m c_m \nabla G_m(\mathbf{x}, t) = 0$ implica $c_m = 0 \forall m = 1, \dots, M$ per ogni \mathbf{x} che soddisfa (1).

Denotiamo con Σ_t la sottovarietà regolare di \mathbf{R}^{3N} definita da (1). Questa é una varietà differenziabile. (vd. FM pg. 40-46)

Per ogni $x \in \Sigma_t$ denotiamo con $T_x \Sigma_t$ lo spazio tangente a Σ_t nel punto x , e con $T\Sigma_t = \cup_{x \in \Sigma_t} T_x \Sigma_t$ il fibrato tangente della varietà Σ_t . (vd. per esempio capitolo 1 di FM o Arnold paragrafo 18 pag 79).

Le equazioni di Newton in questo caso assumono la forma:

$$m^n \ddot{x}_i^n = F_i^n + F_{V_i}^n \quad (2)$$

con $n = 1, \dots, N$ indice di particella, $i = 1, 2, 3$ indice di coordinata in \mathbf{R}^3 e \mathbf{F}_V reazioni vincolari, che rappresentano delle incognite del problema.

Per poter risolvere il problema di determinare le soluzioni dell'equazioni (2) soggette alle condizioni (1) occorre fare l'ipotesi che le reazioni vincolari \mathbf{F}_V soddisfino il principio di D'Alembert.

Definizione

Una **traiettoria virtuale** all'istante t_0 é una qualunque parametrizzazione

$$\alpha \in (-1, 1) \rightarrow \mathbf{x}(\alpha, t_0)$$

tale che per ogni α

$$G_m(\mathbf{x}(\alpha, t_0), t_0) = 0 \quad \forall m = 1, \dots, M$$

cioè una qualunque traiettoria compatibile con i vincoli al tempo t_0 .

Osservazione

Nel caso di vincoli fissi, cioè quando $\Sigma_t = \Sigma$, le traiettorie virtuali coincidono con le traiettorie possibili del sistema cioè con le curve differenziabili su Σ .

Principio di D'Alembert

Le forze di vincolo non compiono lavoro lungo le traiettorie virtuali.

Definizione

*Un vincolo che soddisfa il principio di D'Alembert si dice **perfetto**, o liscio, o ideale.*

Il principio di D'Alembert equivale a dire che per ogni $\alpha_0 \in (0, 1)$:

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\mathbf{F}_V, \frac{d\mathbf{x}}{d\alpha}(\alpha, t_0)) d\alpha = 0$$

e cioè per ogni vettore $\xi \in T_x \Sigma_{t_0}$ abbiamo:

$$(\mathbf{F}_V(x), \xi) = 0$$

In altre parole $\mathbf{F}_V(x)$ è in ogni punto ortogonale allo spazio tangente. Per maggiori dettagli vd. Dell'Antonio pg 187 e seg.

2. La lagrangiana del sistema vincolato

(vd Dell'Antonio cap 7)

Consideriamo dunque il nostro sistema di N punti materiali con vincoli olonomi, bilateri e perfetti e facciamo l'ipotesi che essi siano soggetti a forze conservative con energia potenziale $V(\mathbf{x})$.

In assenza di vincoli la lagrangiana del nostro sistema sarebbe:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T - V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 m^n (\dot{x}_i^n)^2 - V(\mathbf{x})$$

I vincoli dati da (1) definiscono una superficie Σ_t a cui è vincolato il moto che può essere descritta in coordinate parametriche (come negli esempi precedenti) dalle relazioni:

$$x_i^n = x_i^n(q_1, \dots, q_l, t) \quad n = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, 3$$

Se $t \rightarrow \mathbf{q}(t)$ rappresenta il moto descritto nelle coordinate locali q_1, \dots, q_l , possiamo scrivere:

$$\dot{x}_i^n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i^n}{\partial t} \quad (3)$$

Definizione

La lagrangiana del sistema vincolato è definita da:

$$\mathcal{L}_V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t))$$

e il relativo funzionale d'azione è definito da:

$$\Phi_V(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_V(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt$$

3. Principio di minima azione per sistemi vincolati

(vd. Dell'Antonio cap. 7)

Per un sistema con vincoli olonomi bilateri perfetti enunciamo il seguente:

Principio di minima azione o primo principio di Eulero-Lagrange

Le traiettorie del sistema sono punti di stazionarietà del funzionale d'azione

Φ_V

Dimostriamo che il principio di minima azione è equivalente al principio di D'Alembert con la seguente:

Proposizione

Le equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali soggetti a forze conservative e a vincoli olonomi bilateri che soddisfano il principio di D'Alembert, sono equivalenti alle equazioni di Lagrange con lagrangiana

$$\mathcal{L}_V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t))$$

dove $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$ sono coordinate locali sulla superficie $\Sigma_t \subset \mathbf{R}^{3N}$ definita dalle relazioni di vincolo, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{3N}$ sono le coordinate cartesiane e

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{x})$$

Dimostrazione

Sia $\mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$ l'espressione delle coordinate cartesiane in termini delle coordinate locali.

Dalla (3) segue immediatamente che

$$\frac{\partial \dot{x}_i^n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} \quad (4)$$

da cui otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_V}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i^n} \frac{\partial x_i^n}{\partial \dot{q}_k} \right) = \quad (5)$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i^n} \right) \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i^n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_V}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i^n} \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i^n} \frac{\partial \dot{x}_i^n}{\partial q_k} \quad (7)$$

Poiché:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d}{dt} x_i^n = \frac{\partial \dot{x}_i^n}{\partial q_k}$$

otteniamo dalle equazioni (6) e (7):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_V}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}_V}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i^n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i^n} \right) \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} \quad (8)$$

Sapendo che:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i^n} = m^n \ddot{x}_i^n$$

e che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i^n} = F_i^n$$

otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_V}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}_V}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 (m^n \ddot{x}_i^n - F_i^n) \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 (F_V)_i^n \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} = (\mathbf{F}_V, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}) \quad (9)$$

Ricordando che $\frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} \in T_x \Sigma_{t_0}$, possiamo concludere che se vale il principio di D'Alembert allora $(\mathbf{F}_V, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}) = 0$ per ogni k e dunque, dalla (9), valgono le equazioni di Lagrange. Viceversa se valgono le equazioni di Lagrange, osservando che, dall'ipotesi **Hp**, segue che $\frac{\partial x_i^n}{\partial q_k}$ formano una base nello spazio tangente, dalla (9) otteniamo che $(\mathbf{F}_V(x), \xi) = 0$ per ogni vettore $\xi \in T_x \Sigma_{t_0}$ dello spazio tangente, e dunque vale il principio di D'Alembert.

4. Proprietà della lagrangiana vincolata

D'ora in poi studieremo la lagrangiana vincolata e per semplicità di notazione ometteremo l'indice V .

In questo paragrafo studiamo le proprietà generali della lagrangiana vincolata ed in particolare il suo termine di energia cinetica.

Nel caso di vincoli olonomi bilateri fissi, usando l'equazione (3) è immediato verificare che l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea nelle \dot{q}_k che può essere scritta come:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 m^n (\dot{x}_i^n(\mathbf{q}))^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^l a_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_j = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}, A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (10)$$

dove gli elementi $a_{kj}(\mathbf{q})$ della matrice $A(\mathbf{q})$, con $k, j = 1, \dots, l$, sono dati da

$$a_{kj}(\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 m^n \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} \frac{\partial x_i^n}{\partial q_j}$$

La matrice $A(\mathbf{q})$ è dunque una matrice $l \times l$ simmetrica ed è facile dimostrare che è anche definita positiva, cioè per ogni $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$ si ha $(\dot{\mathbf{q}}, A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) > 0$. Infatti dall'ipotesi **Hp.** sui vincoli abbiamo che i vettori $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}$ sono linearmente indipendenti e dunque ricordando che $\dot{x}_i^n = \sum_{k=1}^l \frac{\partial x_i^n}{\partial q_k} \dot{q}_k$ otteniamo che $\dot{\mathbf{x}} = 0$ se e solo se $\dot{\mathbf{q}} = 0$. Dalla definizione di $A(\mathbf{q})$ abbiamo $(\dot{\mathbf{q}}, A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = (\dot{\mathbf{x}}, M \dot{\mathbf{x}})$ con M matrice delle masse che banalmente è definita positiva e dunque per ogni $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$ si ha $\dot{\mathbf{x}} \neq 0$ e dunque $(\dot{\mathbf{q}}, A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = (\dot{\mathbf{x}}, M \dot{\mathbf{x}}) > 0$.

5. Energia generalizzata ed energia totale

(vd. Olivieri cap.11)

Definizione

Dato un sistema descritto da una lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, l'energia generalizzata del sistema è definita da:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

Proposizione 1

Se la lagrangiana del sistema non dipende esplicitamente dal tempo, $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, allora l'energia generalizzata è una costante del moto.

Dimostrazione come in Olivieri pg. 169.

Proposizione 2

Per un sistema a vincoli olonomi bilateri e fissi l'energia generalizzata coincide con l'energia totale del sistema:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q})$$

Dimostrazione come in Olivieri pg. 170.

Osservazione La dimostrazione è un'immediata conseguenza del fatto che se T è una forma quadratica omogenea nelle $\dot{\mathbf{q}}$, $T = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}})$, allora abbiamo $\sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T$.

6. Equilibrio e stabilità

Vogliamo ora studiare i punti di equilibrio e la stabilità delle equazioni di Lagrange, cioè delle equazioni del moto del nostro sistema.

Consideriamo il caso in cui l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea delle \dot{q}_k , per esempio il caso di vincoli olonomi bilateri perfetti e fissi.

Le equazioni di Lagrange del nostro sistema sono allora:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_j a_{k,j}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \right) = \sum_j \sum_{j'} \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_{j'}} \dot{q}_j \dot{q}_{j'} + \sum_j a_{k,j} \ddot{q}_j = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{j'} \frac{\partial a_{jj'}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_{j'} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Queste equazioni possono essere riscritte nella forma:

$$\sum_j a_{k,j} \ddot{q}_j = G_k(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \quad (11)$$

con

$$G_k(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{j'} \left(\frac{\partial a_{jj'}}{\partial q_k} - 2 \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_{j'}} \right) \dot{q}_j \dot{q}_{j'} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

oppure, in notazione vettoriale:

$$A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \nabla V(\mathbf{q}) \quad (12)$$

dove $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ indica la parte quadratica omogenea nelle \dot{q}_i . Poiché la matrice $A(\mathbf{q})$ è invertibile (in quanto definita positiva), la (11) può risciversi come un'equazione differenziale ordinaria in forma normale (cioè risolta rispetto alle derivate di ordine massimo):

$$\ddot{\mathbf{q}} = A^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - A^{-1}(\mathbf{q}) \nabla V(\mathbf{q}) \quad (13)$$

Il sistema di equazioni del secondo ordine (13) può essere riportato ad un sistema di equazioni del prim'ordine, raddoppiando la dimensionalità dello spazio:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - A^{-1}(\mathbf{q})\nabla V(\mathbf{q}). \quad (15)$$

Ciò significa in particolare che i punti di equilibrio di queste equazioni sono:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= 0 \\ \nabla V(\mathbf{q}) &= 0 \end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}) = 0$.

Per studiare la stabilità del punto di equilibrio $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$, con \mathbf{q}_0 punto critico di $V(\mathbf{q})$, abbiamo il seguente:

Teorema di Dirichlet

Dato un sistema a vincoli olonomi bilateri e fissi soggetto a forze conservative con energia potenziale V sufficientemente regolare, se \mathbf{q}_0 è un minimo isolato di V allora $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è una posizione di equilibrio stabile del sistema.

Dimostrazione

La stabilità del punto $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ può essere dimostrata usando la funzione di Liapunov $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}_0)$.

7. Linearizzazione delle equazioni del moto e approssimazione delle piccole oscillazioni

Consideriamo un sistema con vincoli olonomi bilateri perfetti e fissi descritto dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$$

Consideriamo innanzi tutto il caso più semplice $l = 1$. In questo caso $A(q)$ è uno scalare positivo e linearizzando le equazioni (14)-(15) intorno al punto di equilibrio $(q_0, 0)$, si ottiene la matrice 2×2 :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}(q_0)V''(q_0) & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Otteniamo dunque facilmente che se $V''(q_0) < 0$, cioè se q_0 è un massimo del potenziale, allora la matrice L ha un autovalore positivo e dunque il punto di equilibrio $(q_0, 0)$ è instabile.

Anche nel caso di sistemi a due gradi di libertà, $l = 2$, si può vedere facilmente che se la matrice delle derivate seconde calcolate nel punto critico, $V''(\mathbf{q}_0)$, ha un autovalore negativo, allora \mathbf{q}_0 è un punto di equilibrio *instabile* del sistema. Linearizzando le equazioni (14)-(15) intorno al punto di equilibrio $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$,

si ottiene la matrice 4×4 definita dalla matrice a blocchi (ogni elemento e' un blocco 2×2):

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}(\mathbf{q}_0)V''(\mathbf{q}_0) & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

la cui equazione agli autovalori può essere scritta, ponendo $-A^{-1}(\mathbf{q}_0)V''(\mathbf{q}_0) = S$, come:

$$\lambda^4 - \lambda^2 Tr(S) + det(S) = 0 \quad (18)$$

Ne segue che l'equazione per λ^2 è uguale all'equazione agli autovalori della matrice S stessa. Dimostriamo adesso che se $V''(\mathbf{q}_0)$ ha un autovalore $\mu < 0$ allora la matrice S ha un autovalore *positivo*, $\bar{\lambda} > 0$. Infatti essendo A definita positiva l'equazione agli autovalori per $-S = A^{-1}(\mathbf{q}_0)V''(\mathbf{q}_0)$ è uguale a quella della matrice $A^{-1/2}V''A^{-1/2}$:

$$det(A^{-1}V'' - \lambda 1) = 0 \iff det(A^{-1/2}V''A^{-1/2} - \lambda 1) = 0 \quad (19)$$

Ora, se V'' ha un autovalore $\mu < 0$, e \mathbf{x} è l'autovettore corrispondente, si trova che anche la matrice $A^{-1/2}V''A^{-1/2}$ ha un autovalore negativo, in quanto ponendo $\mathbf{y} = A^{1/2}\mathbf{x}$ si ha:

$$(A^{-1/2}V''A^{-1/2}\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (V''\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mu < 0 \quad (20)$$

Pertanto, in virtù della (19), anche $A^{-1}(\mathbf{q}_0)V''(\mathbf{q}_0)$ ha un autovalore negativo, e di conseguenza $S = -A^{-1}(\mathbf{q}_0)V''(\mathbf{q}_0)$ ha un autovalore $\bar{\lambda} > 0$. Ma allora due degli autovalori di L sono soluzione dell'equazione $\lambda^2 = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\bar{\lambda}}$, e quindi L ha un autovalore positivo. Riassumendo, abbiamo visto che se $V''(\mathbf{q}_0)$ ha un autovalore negativo la matrice associata al sistema (14)-(15) linearizzato intorno al punto di equilibrio $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ ha un autovalore positivo, e pertanto, per le note proprietà dei sistemi autonomi, la configurazione $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è di equilibrio instabile.

In generale, per ogni l , se \mathbf{q}_0 è un minimo isolato del potenziale con $V''(\mathbf{q}_0)$ definita positiva, dal teorema di Dirichlet sappiamo che $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ è un punto di equilibrio stabile delle equazioni del moto del sistema.

Definizione

La linearizzazione delle equazioni del moto (14)-(15) intorno al punto di equilibrio $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$, si chiama **approssimazione delle piccole oscillazioni**:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (21)$$

dove L è la matrice $(2l) \times (2l)$ definita dalla seguente matrice a blocchi (ogni blocco è $l \times l$):

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}(q_0)V''(q_0) & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Proposizione

Il sistema ottenuto per linearizzazione è esso stesso un sistema lagrangiano e la sua lagrangiana è:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), V''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)) \quad (23)$$

La lagrangiana in (23) si chiama **lagrangiana delle piccole oscillazioni**.

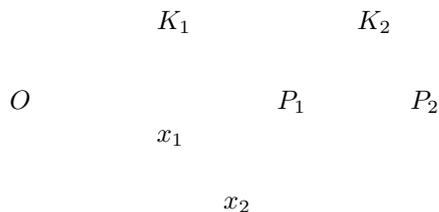
La dimostrazione di questa proposizione è una verifica immediata che le equazioni di Lagrange per la lagrangiana \mathcal{L}_{po} sono le equazioni (21) poichè

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{po}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{po}}{\partial \mathbf{q}} = -V''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \quad (24)$$

Il sistema linearizzato corrisponde ad un sistema di l oscillatori armonici accoppiati ed è risolto esplicitamente nel prossimo paragrafo.

8. Sistema di oscillatori armonici

(vd Fasano Marmi cap.4, vd anche Olivieri cap 11)



Consideriamo un sistema formato da due punti materiali P_1 e P_2 in \mathbf{R} di masse m_1 e m_2 , con P_1 collegato ad un punto fisso O tramite una molla ideale di costante di richiamo K_1 e P_2 collegato a P_1 tramite una molla ideale di costante di richiamo K_2 . Denotiamo con x_1 e x_2 le coordinate dei due punti a partire da O .

La lagrangiana di questo sistema è dunque:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(K_1x_1^2 + K_2(x_2 - x_1)^2) = \\ &= \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}((K_1 + K_2)x_1^2 + K_2x_2^2 - 2K_2x_1x_2) \end{aligned} \quad (25)$$

o in forma compatta, ponendo $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}, A\dot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}, V''\mathbf{x})$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$V'' = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che A e V'' sono due matrici simmetriche e definite positive, cioè $(\mathbf{x}, V''\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq 0$ (e analogamente per A). Ricordiamo che CNES perché una matrice simmetrica sia definita positiva è che tutti i suoi autovalori siano positivi.

La situazione è facilmente generalizzabile al caso di l oscillatori:

Siano A e V'' due matrici $l \times l$ simmetriche e definite positive. La lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}, A\dot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}, V''\mathbf{x})$$

e detta lagrangiana di l oscillatori. Le equazioni di Lagrange si scrivono:

$$A\ddot{\mathbf{x}} + V''\mathbf{x} = 0 \tag{26}$$

Teorema

*Esiste una trasformazione lineare in \mathbf{R}^l che disaccoppia le (26) in l oscillazioni armoniche dette **modi normali** del sistema, le cui pulsazioni, dette **pulsazioni proprie** del sistema, $\omega_1, \dots, \omega_l$ soddisfano l'equazione:*

$$\det(V'' - \omega^2 A) = 0 \tag{27}$$

Dimostrazione come sul Fasano Marmi pg.142-143.

Osservazione

Se U è la trasformazione lineare cercata, cioè se l'evoluzione di $\mathbf{z} := U\mathbf{x}$ e data da:

$$\ddot{\mathbf{z}} = -\Omega^2 \mathbf{z}$$

dove Ω^2 è la matrice diagonale con elementi $\omega_1^2, \dots, \omega_l^2$, allora la k -esima colonna della matrice U è data da un vettore \mathbf{w}_k che soddisfa l'equazione:

$$(V'' - \omega_k^2 A)\mathbf{w}_k = 0$$

In termini dei vettori \mathbf{w}_k la soluzione dell'equazione (26) si può scrivere nella forma:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^l c_k \mathbf{w}_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

dove c_k e ϕ_k sono costanti che dipendono dai dati iniziali.

9. Variabili cicliche e metodo di Routh

(vd. Dell'Antonio cap 7)

Definizione

Dato un sistema di lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ la variabile q_i è **ciclica** se la lagrangiana non dipende da questa coordinata:

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_l, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, t)$$

Dalle equazioni di Lagrange segue immediatamente che il momento coniugato ad una variabile ciclica:

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (28)$$

è costante.

Assumiamo, per semplicità di scrittura, $i = l$.

Come abbiamo visto nel caso di un punto materiale soggetto ad un potenziale centrale, questo permette di ridurre di uno i gradi di libertà del sistema sostituendo nelle equazioni del moto a \dot{q}_l l'espressione in termini di p_l ottenuta invertendo la relazione (28):

$$\dot{q}_l = f(q_1, \dots, q_{l-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{l-1}, p_l) \quad (29)$$

Attenzione: se l'espressione (29) viene sostituita direttamente nella lagrangiana per ridurre i gradi di libertà del problema, si commette un errore!

La lagrangiana ridotta corretta si deve ottenere infatti applicando il **metodo di Routh**, definendo cioè la **lagrangiana ridotta** come:

$$\mathcal{L}_R(q_1, \dots, q_{l-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{l-1}, t) := [\mathcal{L}(q_1, \dots, \dot{q}_l, t) - p_l \dot{q}_l]_{\dot{q}_l = f(q_1, \dots, q_{l-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{l-1}, p_l)} \quad (30)$$

infatti le equazioni di Lagrange con la lagrangiana \mathcal{L}_R per le coordinate q_1, \dots, q_{l-1} coincidono con le equazioni di Lagrange ottenute dalla lagrangiana di partenza \mathcal{L} poiché per ogni $k = 1, \dots, l-1$ abbiamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial f}{\partial q_k} - p_l \frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_k} - p_l \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

10. Reazioni vincolari, minimi condizionati e moltiplicatori di Lagrange

(vd Dell'Antonio cap.7)

Usando il formalismo lagrangiano per il sistema vincolato, abbiamo scritto le equazioni del moto (equazioni di Lagrange per \mathcal{L}_V) nelle coordinate locali \mathbf{q} . Una volta risolte queste equazioni si può risolvere il problema della determinazione delle reazioni vincolari \mathbf{F}_V , utilizzando l'equazione (2), ottenendo:

$$F_{V_i}^n = m^n \ddot{x}_i^n - F_i^n$$

Nel caso di vincoli olonomi bilateri perfetti e fissi, se si vogliono calcolare le reazioni vincolari all'equilibrio, si può procedere anche in un altro modo, utilizzando la teoria dei minimi condizionati e dei moltiplicatori di Lagrange.

Infatti dal principio di D'Alembert otteniamo:

$$\mathbf{F}_V = \sum_{m=1}^M \lambda_m \nabla G_m$$

dove λ_m sono costanti incognite.

Dall'equazione del moto (2) all'equilibrio otteniamo:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_V = -\nabla V + \sum_{m=1}^M \lambda_m \nabla G_m = 0 \quad (31)$$

D'altra parte sappiamo che i punti di equilibrio per vincoli olonomi bilateri perfetti e fissi coincidono con i punti critici di V condizionato a Σ .

Vd. Dell'Antonio pag. 215-218 (minimi condizionati e moltiplicatori di Lagrange).

L'equazione che si ottiene per lo studio della stazionarietà condizionata della funzione $-V$ in termini dei moltiplicatori di Lagrange, coincide con l'equazione (31) in cui le costanti incognite λ_m coincidono con i moltiplicatori di Lagrange.

11. Simmetrie e teorema di Noether

(vd. Arnold pg.90-93)

Definizioni([A] pg.84)

Sia M una varietà regolare. Una applicazione $h : M \rightarrow M$ si dice **differenziabile** se espressa in coordinate locali dà luogo a funzioni differenziabili.

La **derivata** di una applicazione differenziabile h nel punto $\mathbf{x} \in M$ è l'applicazione lineare tra spazi tangenti

$$h_{*\mathbf{x}} : T_{\mathbf{x}}M \rightarrow T_{h(\mathbf{x})}M$$

definita come segue.

Consideriamo una curva $\phi : \mathbf{R} \rightarrow M$ con $\phi(0) = \mathbf{x}$ e con $\frac{d\phi}{dt}|_{t=0} = \mathbf{v}$. Allora $h_{*\mathbf{x}}\mathbf{v}$ è il vettore velocità della curva $h(\phi) : \mathbf{R} \rightarrow M$:

$$h_{*\mathbf{x}}\mathbf{v} = \frac{d}{dt}h(\phi(t))|_{t=0}$$

È immediato dimostrare che:

$$h_{*\mathbf{x}}\mathbf{v}_k = \sum_j \frac{\partial h(\mathbf{x})_k}{\partial x_j} v_j$$

per ogni $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M$.

Riunendo le applicazioni $h_{*\mathbf{x}}$ corrispondenti a tutti gli \mathbf{x} si ottiene un'unica applicazione di tutto il fibrato tangente:

$$h_* : (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in TM \rightarrow (h(\mathbf{x}), h_{*\mathbf{x}}\mathbf{v}) \in TM$$

Un **gruppo a un parametro di diffeomorfismi** h^s è un insieme di applicazioni differenziabili da M in M che dipendono in maniera differenziabile dal parametro $s \in \mathbf{R}$, con $h^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $h^{t+s}(\mathbf{x}) = h^t(h^s(\mathbf{x}))$

Un'applicazione h è **ammissibile** per un sistema lagrangiano su M con lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \mathcal{L}(h_*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Teorema di Noether

Se un sistema lagrangiano ammette un gruppo ad un parametro h^s di diffeomorfismi, allora le equazioni di Lagrange hanno un integrale primo:

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{dh^s(\mathbf{q})_k}{ds} \Big|_{s=0}$$

Dimostrazione Sia $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ una soluzione delle equazioni di Lagrange. Allora anche $h^s(\mathbf{q})$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange per ogni s . Infatti:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} (h_*^s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} (h_*^s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_k} (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial q_k} (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

e per l'invarianza della lagrangiana, $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$, questa espressione deve essere nulla.

Se denotiamo:

$$\Phi(s, t) = h^s(\mathbf{q}(t))$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(\Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t)) = \sum_{k=1}^l \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}(\Phi, \dot{\Phi}) \frac{\partial \Phi_k}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(\Phi, \dot{\Phi}) \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial s \partial t} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^l \left(\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(\Phi, \dot{\Phi}) \right) \frac{\partial \Phi_k}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(\Phi, \dot{\Phi}) \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial s \partial t} \right) = \sum_{k=1}^l \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(\Phi, \dot{\Phi}) \frac{\partial \Phi_k}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

CVD

La conservazione dei momenti coniugati a variabili cicliche, studiata nel paragrafo 9, è un caso particolare del teorema di Noether, vd. esempi sull'Arnold pg. 90-93.