

Scritto di Meccanica Analitica del 4-2-2016

E. Scoppola

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è formato da un punto materiale P di massa m e da un'asta sottile rigida omogenea AB di lunghezza l e massa M . Il punto P è vincolato a muoversi lungo un asse verticale y di Π e l'asta ha gli estremi vincolati senza attrito ad una circonferenza fissa nel piano Π , di centro O giacente sull'asse y e raggio $R = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Il punto è collegato al centro C dell'asta da una molla ideale di costante di richiamo $2K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata y di P e l'angolo θ che OC forma con l'asse orizzontale x .

- 1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
- 2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- 3) Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile e determinarne le pulsazioni proprie.
- 4) Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante ω , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π e i nuovi punti di equilibrio.

Scritto di Meccanica Analitica del 4-2-2016

E. Scoppola

Esercizio 2

Si consideri la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - q^3 \quad \text{con } q > 0. \quad (1)$$

- 1) Scrivere l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
- 2) Determinare la trasformazione canonica generata da $F(q, P) = \frac{q^3 P}{3}$.
- 3) Usare la trasformazione trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$.
- 4) Risolvere le equazioni con gli stessi dati iniziali utilizzando il metodo di Hamilton-Jacobi.