

Scritto di Meccanica Analitica 18-9-2008

E. Scoppola

Soluzione Esercizio 1

- 1) Siano x_1 e x_2 le variabili lagrangiane, abbiamo $y_1 = 0$ e $y_2 = -ax_2^2$.
Dunque l'energia cinetica é:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1 + 4a^2x_2^2)$$

L'energia potenziale gravitazionale é

$$V_g = -m_2gax_2^2$$

e quella elastica

$$V_{el} = \frac{1}{2}K\left((x_1 - x_2)^2 + a^2x_2^4\right)$$

La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1 + 4a^2x_2^2) + m_2gax_2^2 - \frac{1}{2}K\left((x_1 - x_2)^2 + a^2x_2^4\right) \quad (1)$$

Le equazioni del moto sono:

$$m_1\ddot{x}_1 = -Kx_1 + Kx_2 \quad (2)$$

$$m_2\ddot{x}_2(1 + 4a^2x_2^2) = -4m_2a^2x_2\dot{x}_2^2 + 2m_2gax_2 - K(x_1 - x_2) + 2Ka^2x_2^3 \quad (3)$$

- 2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = K(x_1 - x_2) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -2m_2gax_2 + Kx_2 - Kx_1 + 2Ka^2x_2^3 = 0 \quad (5)$$

da cui

$$x_1 = x_2 \quad (6)$$

e

$$2ax_2(Kax_2^2 - m_2g) = 0$$

e dunque i punti critici:

$$(0, 0) \quad \left(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}} \right) \quad (7)$$

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, x) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -2m_2ga + K + 6Ka^2x_2^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

nei diversi punti critici.

$$V''(0, 0) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -2m_2ga + K \end{pmatrix} \quad (9)$$

che ha determinante negativo dunque il punto $(0, 0)$ è instabile.

$$V''\left(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}\right) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K + 4m_2ga \end{pmatrix} \quad (10)$$

ha determinante e traccia positivi e dunque questi due punti sono stabili.

- 3) Intorno a ciascuno dei due punti di equilibrio stabile $\left(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}\right)$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (x_1, x_2)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\pm}, V''(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{\pm})) \quad (11)$$

con $\mathbf{q}_{\pm} = \left(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2(1 + \frac{4am_2g}{K}) \end{pmatrix} \quad (12)$$

- 4) Se $x_1 = 0$ abbiamo

$$V = -m_2gax_2^2 + \frac{1}{2}K(x_2^2 + a^2x_2^4)$$

Dobbiamo distinguere due casi

- i) $2m_2ga > K$
- ii) $2m_2ga \leq K$

Nel caso i) la funzione V ha un massimo in 0 e due minimi in $\pm\sqrt{\frac{2mga-K}{2Ka^2}}$ in questo caso gli unici dati iniziali cui non fa seguito un moto periodico sono quelli per cui l'energia totale é nulla oppure nei due punti di equilibrio $\pm\sqrt{\frac{2mga-K}{2Ka^2}}$ con velocità iniziale nulla.

Nel caso ii) il potenziale é sempre positivo con unico punto critico in 0 e dunque l'unico dato iniziale cui non fa seguito un moto periodico é quello con energia totale nulla.