COMPLEMENTI: OSCILLATORE ARMONICO FORZATO

Consideriamo un oscillatore armonico in presenza di attrito e di un termine forzante dato da una funzione periodica del tempo $f(t)$ di periodo T:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = \frac{f(t)}{m} \tag{1}$$

dove $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ed α e' il coefficiente di attrito.
Questo e' dunque un caso di equazione differenziale lineare non omogenea.
Cerchiamo la soluzione della equazione (1) nella seguente forma:

$$x(t) = x_{omog}(t) + x_{part}(t) \tag{2}$$

dove $x_{omog}(t)$ e' soluzione dell'equazione omogenea associata a (1):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0 \tag{3}$$

e $x_{part}(t)$ e' una soluzione particolare che supponiamo periodica di periodo T.

1. Soluzione omogenea

L'equazione omogenea (3) e' lineare e puo' essere scritta nella forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

dove A e' la matrice 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & -\frac{\alpha}{m} \end{pmatrix} \tag{1}$$

La soluzione puo' essere scritta nella forma $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x_0}$.
Ricordiamo che nel caso $\alpha = 0$ abbiamo:

$$x_{omog}(t) = B\cos(\omega_0 t + \phi)$$

con B e ϕ dipendenti dai dati iniziali, mentre nel caso $\alpha > 0$ abbiamo dobbiamo distiguere diversi sottocasi.

Denotiamo per semplicita' $\beta = \frac{\alpha}{2m}$. Se $\beta > \omega_0$ gli autovalori della matrice A sono reali e abbiamo:

$$x_{omog}(t) = B_1 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + B_2 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

con B_1 e B_2 dipendenti dai dati iniziali.

Se $\beta < \omega_0$ gli autovalori di A sono complessi coniugati e la soluzione puo' essere scritta nella forma:

$$x_{omog}(t) = Be^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \phi)$$

Infine se $\beta = \omega_0$ gli autovalori sono reali e coincidenti e la soluzione e' della forma:

$$x_{omog}(t) = e^{-\beta t}(B_1 + B_2 t)$$

2. Soluzione particolare

Per costruire una soluzione particolare della eq. (1), utilizziamo il seguente:

Teorema di Fourier *Sia $g(t)$ una funzione C^∞ periodica di periodo T, allora esiste una successione $\{\hat{g}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ di numeri complessi tale che per ogni $t \in \mathbf{R}$:*

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n e^{\frac{2\pi}{T} int} \tag{4}$$

e anche:
1) per ogni n $\hat{g}_n$ e' il complesso coniugato di $\hat{g}_{-n}$
2) per ogni n:

$$\hat{g}_n = \frac{1}{T}\int_0^T g(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

3) per ogni intero p:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + |n|^p)|\hat{g}_n| = 0$$

4) per ogni $s = 0, 1, 2...$ e per ogni t:

$$\frac{d^s}{dt^s} g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{2\pi}{T} in)^s \hat{g}_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

Osservazioni:

i) Il teorema di Fourier afferma che le funzioni $\{e^{\frac{2\pi}{T}int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ formano una base nello spazio delle funzioni C^∞ periodiche di periodo T.

ii) I coefficienti $\hat{g}_n$ sono i coefficienti di Fourier della funzione $g(t)$ e la proprieta' 3) afferma che essi tendono a zero piu' velocemente di ogni potenza. Questo assicura la convergenza di tutte le serie e gli integrali che compaiono nel teorema.

iii) Conseguenza del teorema di Fourier e' che date due funzioni periodiche di uguale periodo T, $f(t)$ e $g(t)$ l'affermazione $f(t) = g(t)$ per ogni $t \in \mathbf{R}$ e' equivalente a $\hat{f}_n = \hat{g}_n$ per ogni n intero.

Usando il teorema di Fourier possiamo scrivere:

$$x_{part}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

e l'equazione (1) diventa:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [(i\frac{2\pi}{T}n)^2 + \omega_0^2 + \frac{\alpha}{m}(i\frac{2\pi}{T}n)]\hat{x}_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{m} e^{\frac{2\pi}{T}int}$$

da cui otteniamo, usando l'osservazione iii):

$$\hat{x}_n = \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T}n)^2 + i\frac{2\pi}{T}n\frac{\alpha}{m}]} \tag{5}$$

e dunque la soluzione formale:

$$x_{part}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T}n)^2 + i\frac{2\pi}{T}n\frac{\alpha}{m}]} e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \tag{6}$$

2.a Caso $\alpha > 0$

In questo caso il denominatore in (5) e' sempre diverso da zero e dunque la soluzione (6) e' ben definita e quindi la soluzione dell'equazione (1) e' :

$$x(t) = x_{omog}(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T}n)^2 + i\frac{2\pi}{T}n\frac{\alpha}{m}]} e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

2.b Caso $\alpha = 0$ non risonante

Supponiamo che $\alpha = 0$ e non esiste nessun intero n_0 tale che $T = n_0T_0$ dove $T_0 := \frac{2\pi}{\omega_0}$. Anche in questo caso il denominatore in (5) e' sempre diverso da zero e dunque la soluzione dell'equazione (1) e':

$$x(t) = B\cos(\omega_0 t + \phi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T}n)^2]} e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

2.c Caso $\alpha = 0$ risonante

Supponiamo che $\alpha = 0$ ed esiste un intero n_0 tale che $T = n_0T_0$. Questo implica $\omega_0^2 = (\frac{2\pi}{T}n_0)^2$ ed ho dunque uno zero al denominatore in (5). Dunque la soluzione formale (6) non e' definita. In questo caso risonante occorre procedere in modo diverso.

Definiamo

$$f_{nr}(t) = \sum_{n=-\infty, n\neq n_0}^{\infty} \hat{f}_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

e

$$f_r(t) = \hat{f}_{n_0} e^{i\frac{2\pi}{n_0 T_0} n_0 t} + \hat{f}_{-n_0} e^{-i\frac{2\pi}{n_0 T_0} n_0 t}$$

e cerchiamo la soluzione particolare $x_{part}(t)$ nella forma:

$$x_{part}(t) = x_{nr}(t) + x_r(t)$$

dove $x_{nr}(t)$ e' soluzione di

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_{nr}(t)}{m} \tag{7}$$

e $x_r(t)$ e' soluzione di:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_r(t)}{m} \tag{8}$$

La soluzione dell'eq. (7) si trova come nel caso non risonate:

$$x_{nr}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_n e^{i\frac{2\pi}{T} nt}$$

con

$$\hat{x}_n = 0 \quad \text{se } n = n_0$$

$$\hat{x}_n = \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T} n)^2]} \text{ se } n \neq \pm n_0$$

La soluzione dell'eq. (8) e' la somma delle soluzioni delle due seguenti equazioni:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{f}_{n_0}}{m} e^{i\frac{2\pi}{T_0} t} \tag{9}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{f}_{-n_0}}{m} e^{-i\frac{2\pi}{T_0} t} \tag{10}$$

La soluzione di (10) e' la complessa coniugata della soluzione di (9), quindi per risolvere la (6) basta risolvere la (7) e poi prenderne 2 volte la parte reale.

Cerchiamo la soluzione di (9) nella forma:

$$x(t) = tg(t)$$

con

$$g(t) = ae^{i\frac{2\pi}{T_0} t}$$

da cui:

$$\dot{x}(t) = g(t) - t\dot{g}(t)$$

$$\ddot{x}(t) = 2\dot{g}(t) + t\ddot{g}(t) = ae^{i\frac{2\pi}{T_0}t}[2i\frac{2\pi}{T_0} - t(\frac{2\pi}{T_0})^2]$$

e mettendo queste espressioni nella (9) otteniamo:

$$ae^{i\frac{2\pi}{T_0}t}[2i\frac{2\pi}{T_0} - t(\frac{2\pi}{T_0})^2] + (\frac{2\pi}{T_0})^2 ate^{i\frac{2\pi}{T_0}t} = \frac{\hat{f}_{n_0}}{m}e^{i\frac{2\pi}{T_0}t}$$

da cui otteniamo

$$a = -i\frac{\hat{f}_{n_0}T_0}{4\pi m}$$

e quindi

$$x_r(t) = 2Re\{-it\frac{\hat{f}_{n_0}T_0}{4\pi m}e^{i\frac{2\pi}{T_0}t}\}$$

Dunque la soluzione di (1) nel caso $\alpha = 0$ e risonante diventa:

$$x(t) = B\cos(\omega_0 t + \phi) + \sum_{n=-\infty,\, n\neq\pm n_0}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{m[\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T}n)^2]}e^{i\frac{2\pi}{T}nt} - 2tRe\{i\frac{\hat{f}_{n_0}T_0}{4\pi m}e^{i\frac{2\pi}{T_0}t}\}$$

Si noti che a causa del termine risonante l'oscillazione aumenta nel tempo in modo lineare.