

Tutorato 3

Sistemi unidimensionali conservativi

21/10/2014

Esercizio 1: Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = -4x \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \right).$$

- 1 - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.
- 2 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determinino i punti di equilibrio e la loro stabilità.
- 3 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.
- 4 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici e a moti chiusi aperiodici.
- 5 - Si scriva il periodo dei moti periodici in forma di un integrale definito.

Esercizio 2: Si consideri il sistema meccanico

$$\ddot{x} = x^2 - x.$$

- 1 - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.
- 2 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determinino i punti di equilibrio e la loro stabilità.
- 3 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.
- 4 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti, e a moti chiusi aperiodici.
- 5 - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente o no.
- 6 - Si risolvi esplicitamente il moto sulla separatrice con $x(0) = -1/2$ e $\dot{x}(0) = 0$ per quadrature.

Esercizio 3: Si consideri un pendolo di massa m e lunghezza l . Ricordiamo l'espressione della sua energia potenziale

$$U(\theta) = -\frac{mg}{l} \cos(\theta)$$

dove θ è l'angolo tra il pendolo e la verticale.

- 1 - Si risolvi esplicitamente il moto sulla separatrice, cioè $E = mg/l$, con $\theta(0) = 0$ per quadrature.
- 2 - Si scriva il periodo del moto in forma di un integrale definito. (*facoltativo*) Si calcoli il limite di questo periodo quando $E \rightarrow -mg/l$ (limite delle *piccole oscillazioni*).

Esercizio 4: Si consideri il sistema meccanico con energia potenziale

$$U(x) = \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}$$

(potenziale di *Lennard-Jones*).

- 1 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità.
- 2 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.
- 3 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti.
- 4 - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente.

Esercizio 5: Si consideri il sistema meccanico con energia potenziale

$$U(x) = x + 2 \sin x.$$

- 1 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità.
- 2 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.
- 3 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti, e a moti chiusi aperiodici.
- 4 - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente.