Tutorato 3 - Soluzione

Sistemi unidimensionali conservativi

21/10/2014

Esercizio 1: Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = -4x\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right).$$

1 - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.

2 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità.

3 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.

4 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici e a moti chiusi aperiodici.

5 - Si scriva il periodo dei moti periodici in forma di un integrale definito.

Soluzione:

1 - L'equazione si può riscrive nella forma seguente:

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\left(x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right)$$

quindi

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 =: \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x).$$

Segue

$$\dot{E} = \ddot{x}\dot{x} + 4x\dot{x}\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right) = 0$$

2 - I punti critici di U sono

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_\pm = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right)$$

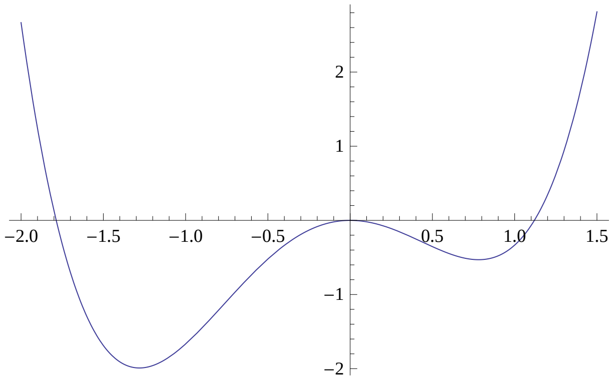
e

$$\lim_{x\to-\infty} U(x) = \infty, \quad U(\bar{x}_0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} U(x) = \infty$$

inoltre

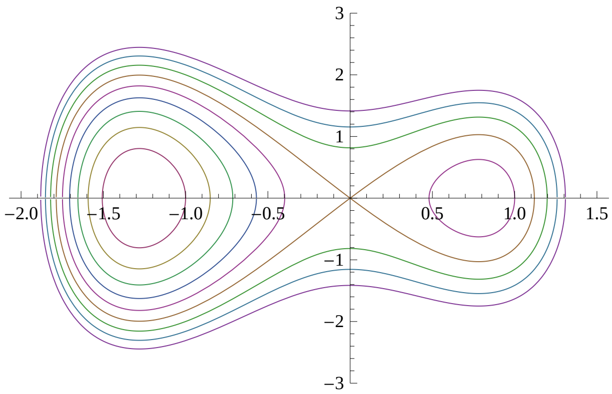
$$U(\bar{x}_-) = \frac{-121 - 17\sqrt{17}}{96} < U(\bar{x}_+) = \frac{-121 + 17\sqrt{17}}{96} < 0$$

quindi $\bar{x}_0$ è un massimo e $\bar{x}_\pm$ sono minimi.Il grafico di U è



I punti di equilibrio del sistema sono $\bar{x}_0$ (instabile) e $\bar{x}_\pm$ (stabili).

3 - Le curve di livello si deducono dal grafico del potenziale:



4 - Segue dallo studio del grafico di U che se $E \neq 0$, allora il moto è periodico, e se $E = 0$, allora il moto è aperiodico e chiuso.

5 - Il periodo del moto è

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} dx\ \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x)}}$$

dove x_- e x_+ sono le soluzioni di $E = U(x)$ che sono tali che $x(0) \in [x_-, x_+]$.

Esercizio 2: Si consideri il sistema meccanico

$$\ddot{x} = x^2 - x.$$

1 - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.

2 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità.

3 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.

4 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti, e a moti chiusi aperiodici.

5 - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente o no.

6 - Si risolvi esplicitamente il moto sulla separatrice con $x(0) = -1/2$ e $\dot{x}(0) = 0$ per quadrature.

Soluzione:

1 - L'equazione si può riscrive nella forma seguente:

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

quindi

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 =: \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x).$$

Segue

$$\dot{E} = \ddot{x}\dot{x} + (x^2 - x)\dot{x} = 0$$

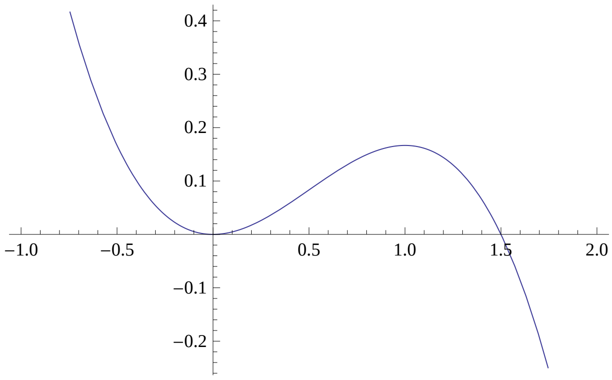
2 - I punti critici di U sono

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_+ = 1$$

e

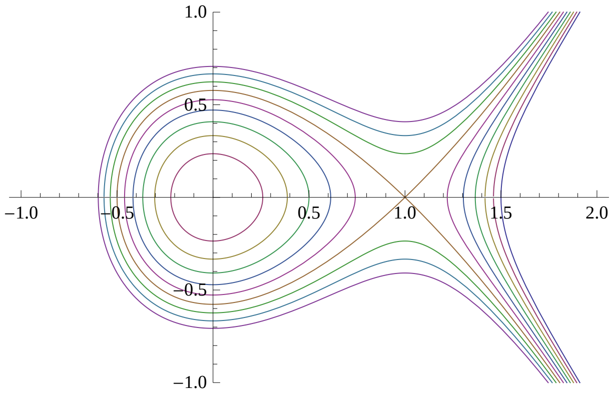
$$\lim_{x\to-\infty} U(x) = \infty, \quad U(\bar{x}_0) = 0, \quad U(\bar{x}_+) = \frac{1}{6} > 0, \quad \lim_{x\to\infty} U(x) = -\infty$$

quindi $\bar{x}_0$ è un massimo e $\bar{x}_+$ è un minimo. Il grafico di U è



I punti di equilibrio del sistema sono $\bar{x}_0$ (stabile) e $\bar{x}_+$ (instabile).

3 - Le curve di livello si deducono dal grafico del potenziale:



4 - Segue dallo studio del grafico di U che

- se $E < 1/6$ e $x(0) < 1$, allora il moto è periodico,
- se $E = 1/6$ e $x(0) < 1$ o $\dot{x}(0) < 0$, allora il moto è aperiodico e chiuso,
- se $E > 1/6$ o $E < 1/6$ e $x(0) > 1$ o $E = 1/6$ e $x(0) > 1$ e $\dot{x}(0) > 0$, allora il moto è aperto.

5 - Supponiamo che $x(0) > 1$ e $\dot{x}(0) > 0$. Il tempo per arrivare a ∞ è

$$\tau_\infty = \int_{x(0)}^{\infty} dx \; \frac{1}{\sqrt{2(E - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)}}$$

Dato che

$$\frac{1}{\sqrt{2(E - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)}} \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}x^3}}$$

è integrabile in ∞, τ_∞ è finito, quindi il moto non è definito globalmente.

6 - Fissiamo $E = 1/6$, $x(0) = -1/2$ e $\dot{x}(0) = 0$. Abbiamo

$$t = \int_{-1/2}^{x(t)} dx \, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}(x-1)^2(2x+1)}} = \sqrt{3} \int_{-1/2}^{x(t)} dx \, \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+2x}}.$$

Cambiamo variabili a $u := \sqrt{1+2x}$:

$$t = \sqrt{3} \int_0^{\sqrt{1+2x(t)}} du \, \frac{2}{1-u^2} = 2\sqrt{3} \ \mathrm{arctanh}\sqrt{1+2x(t)}$$

quindi

$$x(t) = \frac{\tanh^2(\frac{t}{2\sqrt{3}}) - 1}{2}.$$

Esercizio 3: Si consideri un pendolo di massa m e lunghezza l. Ricordiamo l'espressione della sua energia potenziale

$$U(\theta) = -\frac{mg}{l} \cos(\theta)$$

dove θ è l'angolo tra il pendolo e la verticale.

1 - Si risolvi esplicitamente il moto sulla separatrice, cioè $E = mg/l$, con $\theta(0) = 0$ per quadrature.

2 - Si scriva il periodo del moto in forma di un integrale definito. *(facoltativo)* Si calcoli il limite di questo periodo quando $E \to -mg/l$ (limite delle *piccole oscillazioni*).

Soluzione:

1 - Supponiamo che $\dot{\theta}(0) > 0$ (il caso $\dot{\theta}(0) < 0$ si può risolvere nello stesso modo). Sia $\omega^2 := \sqrt{g/l}$. Abbiamo

$$t = \int_0^{\theta(t)} d\theta \, \frac{1}{\sqrt{2\omega^2(1+\cos\theta)}}$$

Cambiamo variabili a $u := \cos\theta$:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_{\cos\theta(t)}^1 du \, \frac{1}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+u}} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_{\cos\theta(t)}^1 du \, \frac{1}{\sqrt{1-u}(1+u)}$$

e a $v := \sqrt{(1-u)/2}$:

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^{\sqrt{(1-\cos\theta(t))/2}} dv \, \frac{1}{1-v^2} = \frac{1}{\omega} \mathrm{arctanh}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta(t)}{2}}\right)$$

quindi

$$\theta(t) = \arccos\left(1 - 2\tanh^2(\omega t)\right).$$

2 - Il periodo del moto è

$$T = 2\int_{\theta_-}^{\theta_+} d\theta \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\theta))}}$$

dove se $E < m\omega^2$, allora $\theta_\pm$ sono le soluzioni di $E = U(\theta)$, e $\theta_\pm = \pm\pi$ se $E > m\omega^2$.

Supponiamo che $E = -m\omega^2(1-\epsilon^2)$. Le soluzioni di $U(\theta) = E$ sono $\pm\theta_\epsilon$. Il periodo delle oscillazioni è

$$T_\epsilon = 2\int_{-\theta_\epsilon}^{\theta_\epsilon} d\theta \, \frac{1}{\sqrt{2\omega^2(-1+\cos\theta - \epsilon)}} = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\int_{-1}^{1} d\tau \, \frac{\theta_\epsilon}{\sqrt{-1+\cos(\theta_\epsilon\tau)+\epsilon^2}}.$$

Inoltre, dato che

$$\theta_\epsilon = \arccos(1-\epsilon^2) = \sqrt{2}\epsilon + f(\epsilon^2)$$

dove f è tali che se ϵ è abbastanza piccolo, allora esistono $c_2 > c_1 > 0$ tali che

$$c_1\epsilon^2 < f(\epsilon^2) < c_2\epsilon^2$$

(questo segue dal teorema di Taylor), troviamo

$$T_\epsilon = \frac{2}{\omega}\int_{-1}^{1} d\tau \, \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} + g(\tau,\epsilon)\right)$$

dove g è tali che se ϵ è abbastanza piccolo, allora esiste $C > 0$ tali che

$$g(\tau,\epsilon) < C\epsilon.$$

Segue dal teorema di convergenza dominata che

$$\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Esercizio 4: Si consideri il sistema meccanico con energia potenziale

$$U(x) = \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}$$

(potenziale di *Lennard-Jones*).

1 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità.

2 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.

3 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti.

4 - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente.

Soluzione:

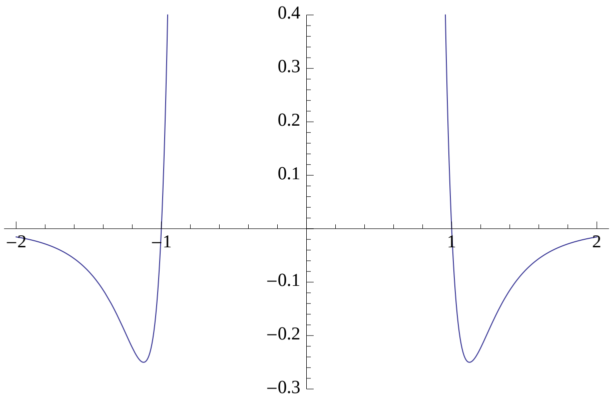
1 - I punti critici di U sono

$$\bar{x}_{\pm} := \pm 2^{1/6}$$

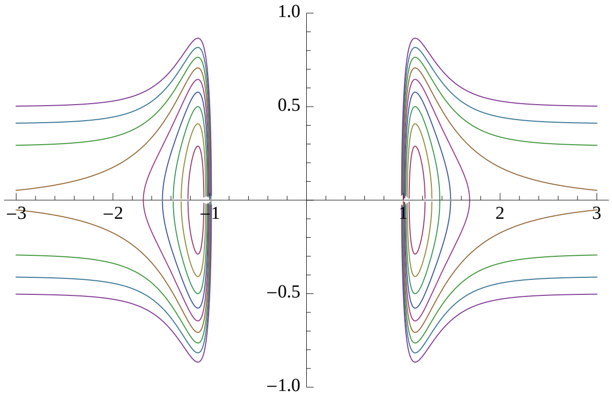
e

$$\lim_{x \to \pm\infty} U(x) = 0 \qquad U(\bar{x}_{\pm}) = -\frac{1}{4}$$

quindi $\bar{x}_{\pm}$ sono massimi. Il grafico di U è



2 - Le curve di livello si deducono dal grafico del potenziale:



3 - Segue dallo studio del grafico di U che

- se $-1/4 < E < 0$ il moto è periodico,
- se $E > 0$ il moto è aperto, e tende a un moto *ballistico* dove la velocita è costante,
- se $E = 0$ il moto è aperto, ma la velocità decade come x^{-3}.

4 - Poiché il potenziale è limitato dal basso, i moti aperti sono definiti globalmente.

Esercizio 5: Si consideri il sistema meccanico con energia potenziale

$$U(x) = x + 2\sin x.$$

1 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità.

2 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.

3 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti, e a moti chiusi aperiodici.

4 - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente.

Soluzione:

1 - I punti critici di U sono

$$\bar{x}_{\pm,k} := \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

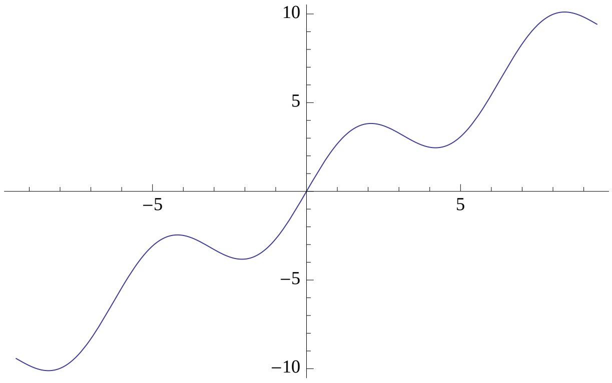
dove $k \in \mathbb{Z}$, e

$$\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = \pm\infty \qquad U(\bar{x}_{\pm,k}) = \pm\sqrt{3} + \bar{x}_{\pm,k}$$

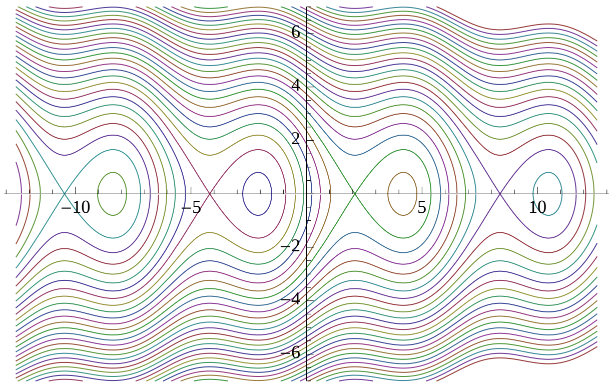
e

$$U(\bar{x}_{-,k}) - U(\bar{x}_{+,k-1}) = -2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} < 0$$

quindi $\bar{x}_{+,k}$ sono massimi e $\bar{x}_{-,k}$ sono minimi. quindi $\bar{x}_{\pm}$ sono massimi. Il grafico di U è



2 - Le curve di livello si deducono dal grafico del potenziale:



3 - Segue dallo studio del grafico di U che se x_E è la più piccola delle soluzioni di $U(x) = E$, allora

- se $\forall k \in \mathbb{Z}$, $E \neq U(\bar{x}_{+,k})$ e $x(0) < x_E$ allora il moto è aperto,
- se $\forall k \in \mathbb{Z}$, $E \neq U(\bar{x}_{\pm,k})$ e $x(0) > x_E$ allora il moto è periodico,
- se $E = U(\bar{x}_{+,k})$ e $x(0) > x_E$ o $\dot{x}(0) > 0$, allora il moto e aperiodico e chiuso.

4 - Il tempo necessario per arrivare a $-\infty$ è

$$\tau_{-\infty} = \int_{-\infty} dx \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - x - 2\sin x)}} = \infty$$

quindi il moto è definito globalmente.