

# Tutorato 4

## Sistemi unidimensionali conservativi 2

28/10/2014

**Esercizio 1:** Si consideri il sistema meccanico

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x(1 - \lambda \cos x)$$

con  $\lambda > 0$ . Questa equazione descrive il moto di un pendolo in rotazione con velocità angolare costante. La coordinata  $x$  è l'angolo di deviazione alla verticale.

- 1 - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.
- 2 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale al variare di  $\lambda$  e si determinino i punti di equilibrio e la loro stabilità.
- 3 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi al variare di  $\lambda$ .
- 4 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici e a moti chiusi aperiodici al variare di  $\lambda$ .
- 5 - Si scriva il periodo dei moti periodici in forma di un integrale definito.

**Esercizio 2:** Si consideri il sistema meccanico

$$\ddot{x} = 4x^3 - 4x.$$

- 1 - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.
- 2 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determinino i punti di equilibrio e la loro stabilità.
- 3 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.
- 4 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti, e a moti chiusi aperiodici.
- 5 - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente o no.

**Esercizio 3:** Si consideri il sistema meccanico

$$\ddot{x} = -\omega^2 \left( x - \frac{\lambda}{a-x} \right)$$

con  $\lambda > 0$ ,  $a > 0$  e  $x < a$ .

- 1** - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.
- 2** - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determinino i punti di equilibrio e la loro stabilità.
- 3** - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.
- 4** - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti, e a moti chiusi aperiodici.
- 5** - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente o no.