Tutorato 4 - Soluzione

Sistemi unidimensionali conservativi 2

28/10/2014

Esercizio 1: Si consideri il sistema meccanico

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x(1 - \lambda \cos x)$$

con $\lambda > 0$. Questa equazione descrive il moto di un pendolo in rotazione con velocità angolare costante. La coordinata x è l'angolo di deviazione alla verticale.

1 - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.

2 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale al variare di λ e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità.

3 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi al variare di λ.

4 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici e a moti chiusi aperiodici al variare di λ.

5 - Si scriva il periodo dei moti periodici in forma di un integrale definito.

Soluzione:

1 - L'equazione si può riscrive nella forma seguente:

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\left(-\omega^2 \cos x \left(1 - \frac{1}{2}\lambda \cos x\right)\right)$$

quindi

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \omega^2 \cos x \left(1 - \frac{1}{2}\lambda \cos x\right) =: \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x).$$

Segue

$$\dot{E} = \ddot{x}\dot{x} + \omega^2 \sin x \dot{x} \left(1 - \lambda \cos x\right) = 0$$

2 - I punti critici di U sono (a meno di una traslazione di $2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$)

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_\pi = \pi$$

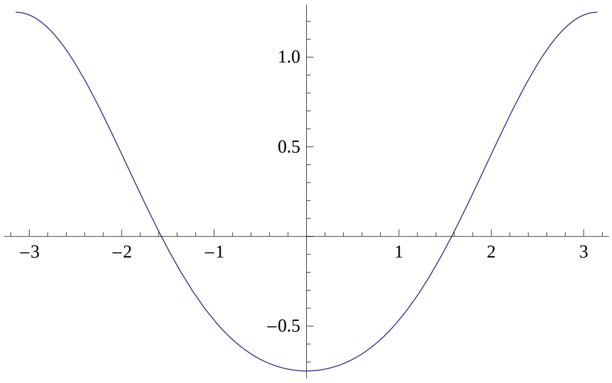
e se $\lambda \geqslant 1$,

$$\bar{x}_\pm = \pm \arccos \frac{1}{\lambda}.$$

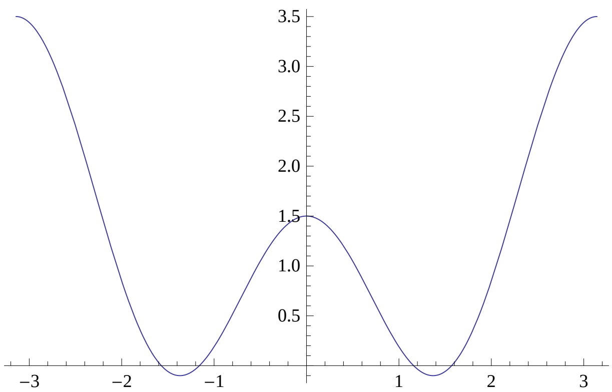
Inoltre
$$U(0) = \omega^2 \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right), \quad U(\pi) = \omega^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$$
e se $\lambda \geqslant 1$,
$$U(\bar{x}_\pm) = -\frac{\omega^2}{2\lambda}.$$
Quindi

- se $\lambda \leqslant 1$ allora 0 è un minimo di U (punto di equilibrio stabile) e π è un massimo di U (punto di equilibrio instabile).
- se $\lambda > 1$ allora 0 e π sono massimi di U (punti di equilibrio instabili) e $\bar{x}_\pm$ sono minimi di U (punti di equilibrio stabili).

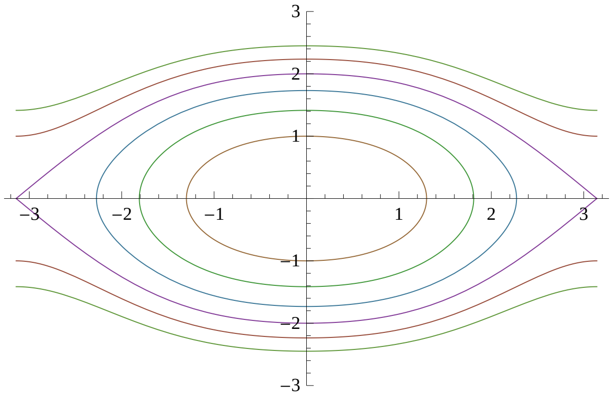
Se $\lambda < 1$ allora il grafico di U è dalla forma



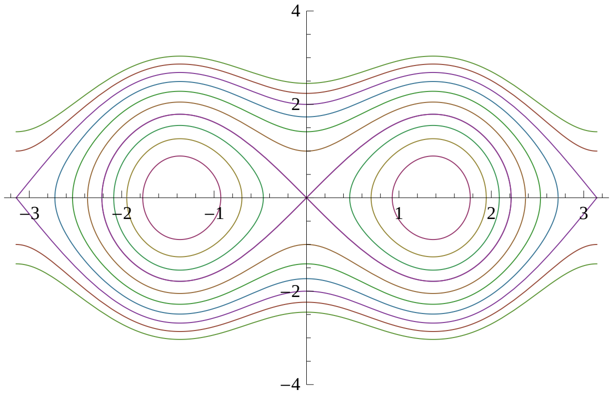
Se $\lambda \geqslant 1$ allora il grafico di U è dalla forma



3 - Le curve di livello si deducono dal grafico del potenziale: se $\lambda \leqslant 1$



se $\lambda > 1$



4 - Se $\lambda \leqslant 1$, se $E \neq \omega^2(1+\lambda/2)$ allora il moto è periodico; se $E = \omega^2(1+\lambda/2)$ allora il moto è chiuso aperiodico. Se $\lambda > 1$, se $E \neq \omega^2(\lambda/2-1)$ e $E \neq \omega^2(1+\lambda/2)$ allora il moto è periodico; so no allora il moto è chiuso aperiodico.

5 - Il periodo del moto è

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} dx \ \frac{1}{\sqrt{2(E-U(x))}}$$

dove x_- e x_+ sono le soluzioni di $E = U(x)$ che sono tali che $x(0) \in [x_-, x_+]$.

Esercizio 2: Si consideri il sistema meccanico

$$\ddot{x} = 4x^3 - 4x.$$

1 - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.

2 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità.

3 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.

4 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti, e a moti chiusi aperiodici.

5 - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente o no.

Soluzione:

1 - L'equazione si può riscrive nella forma seguente:

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\left(-x^4 + 2x^2\right)$$

quindi

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - x^4 + 2x^2 =: \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x).$$

Segue

$$\dot{E} = \ddot{x}\dot{x} - 4\dot{x}x^3 + 4\dot{x}x = 0.$$

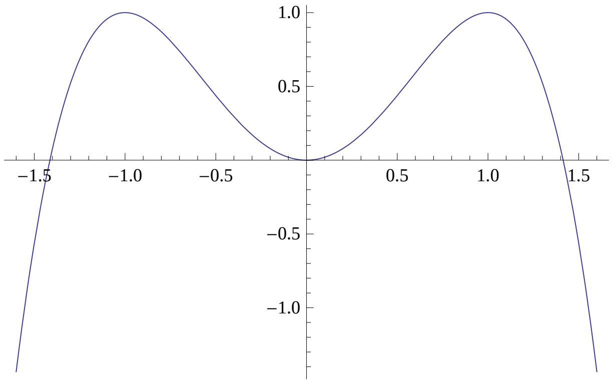
2 - I punti critici di U sono

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_\pm = 1.$$

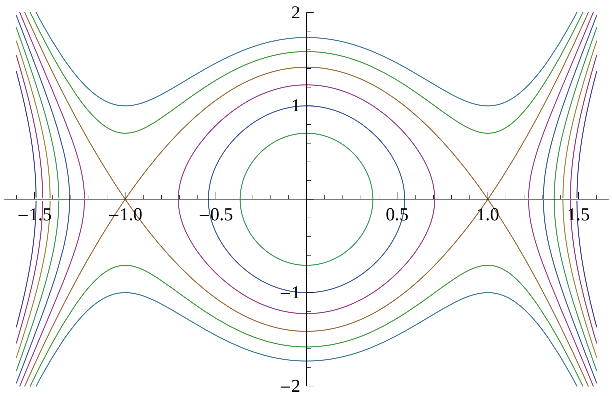
Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = -\infty, \quad U(\bar{x}_0) = 0, \quad U(\bar{x}_\pm) = 1 > 0$$

quindi $\bar{x}_0$ è un minimo (punto di equilibrio stabile) e $\bar{x}_\pm$ sono massimi (punti di equilibrio instabili) del potenziale. Il grafico di U è



3 - Le curve di livello si deducono dal grafico del potenziale:



4 - Se $E > 1$ allora il moto è aperto. Se $E < 1$ e $|x(0)| < 1$ allora il moto è periodico; se $|x(0)| > 1$ allora è aperto. Se $E = 1$ e $|x(0)| < 1$ o $\text{sign}(\dot{x}(0)) = -\text{sign}(x(0))$ allora il moto è limitato aperiodico.

5 - Se il moto è aperto, il tempo necessario per arrivare a $\pm\infty$ è

$$\tau_\infty = \int^\infty dx \; \frac{1}{\sqrt{2(E + x^4 - 2x^2)}} < \infty$$

quindi il moto non è definito globalmente.

Esercizio 3: Si consideri il sistema meccanico

$$\ddot{x} = -\omega^2 \left(x - \frac{\lambda}{a - x} \right)$$

con $\lambda > 0$, $a > 0$ e $x < a$.

1 - Si determini l'espressione dell'energia del sistema, e si verifichi esplicitamente la sua conservazione.

2 - Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità.

3 - Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.

4 - Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici, a moti aperti, e a moti chiusi aperiodici.

5 - Si determini se i moti aperti sono definiti globalmente o no.

Soluzione:

1 - L'equazione si può riscrive nella forma seguente:

$$\ddot{x} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \omega^2 \lambda \log(a - x) \right)$$

quindi

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \omega^2 \lambda \log(a - x) =: \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x).$$

Segue

$$\dot{E} = \ddot{x}\dot{x} + \dot{x}\omega^2 \left(x - \frac{\lambda}{a - x} \right) = 0.$$

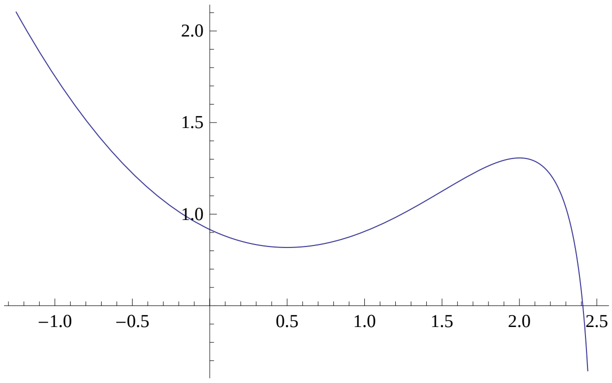
2 - Se $a^2 > 4\lambda$, allora i punti critici di U sono

$$\bar{x}_\pm = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\lambda}}{2}.$$

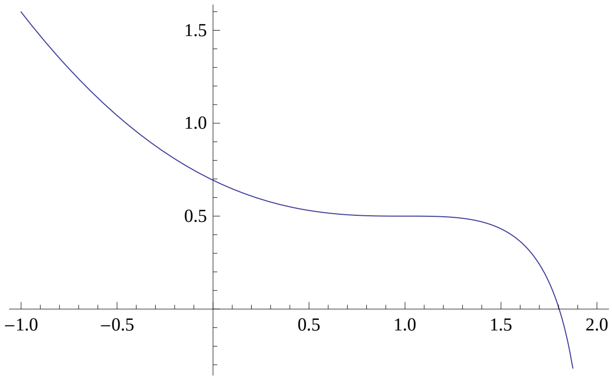
Inoltre

$$U(0) = \omega^2 \lambda \log a, \quad \lim_{x \to a} U(x) = -\infty$$

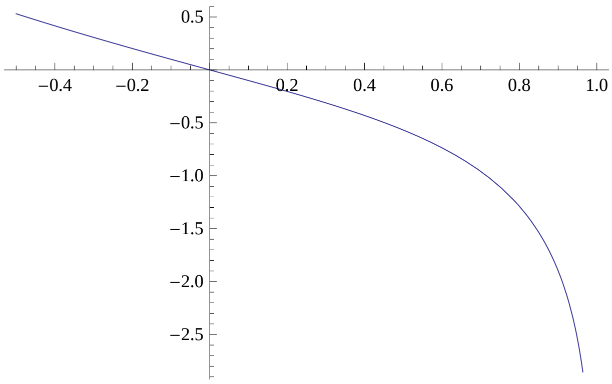
e $U'(x) > 0$ se e solo se $x \in (\bar{x}_-, \bar{x}_+)$, quindi $\bar{x}_-$ è un minimo (punto di equilibrio stabile) e $\bar{x}_+$ è un massimo (punto di equilibrio instabile) del potenziale. Se $a^2 = 4\lambda$, allora U è decrescente, con un punto di inflessione in $\bar{x}_+ = \bar{x}_- = a/2$. Se $a^2 < 4\lambda$, allora U è decrescente. Se $a^2 > 4\lambda$ allora il grafico di U è dalla forma



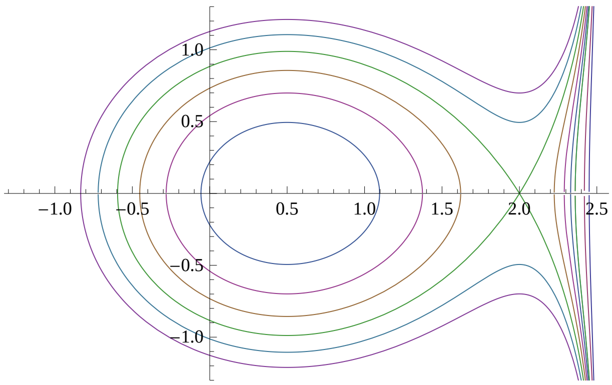
se $a^2 = 4\lambda$ allora il grafico di U è dalla forma



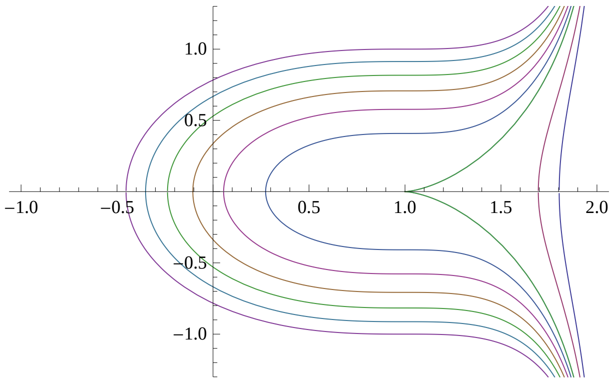
se $a^2 < 4\lambda$ allora il grafico di U è dalla forma



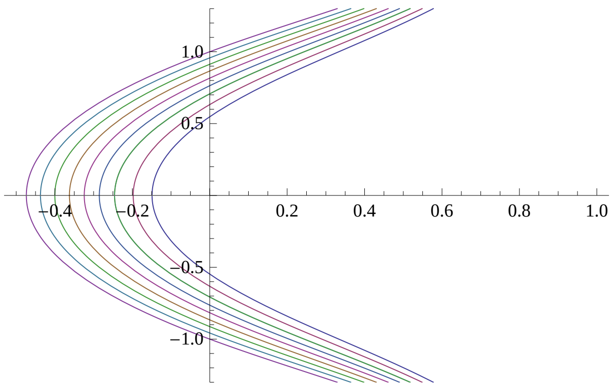
3 - Le curve di livello si deducono dal grafico del potenziale: se $a^2 > 4\lambda$



se $a^2 = 4\lambda$



se $a^2 < 4\lambda$



4 - Se $a^2 > 4\lambda$, se $E < U(\bar{x}_+)$ e $x(0) \in (\bar{x}_-, \bar{x}_+)$ allora il moto è periodico, se $E = U(\bar{x}_+)$ e $x(0) < \bar{x}_+$ o $\dot{x}(0) < 0$ allora il moto è chiuso aperiodico, negli altri casi il moto è aperto. Se $a^2 = 4\lambda$, se $E = U(\bar{x}_+)$ e $\dot{x}(0) < 0$ allora il moto è chiuso aperiodico, se no il moto è aperto. Se $a^2 < 4\lambda$ allora il moto è aperto.

5 - Se il moto è aperto, il tempo necessario per arrivare a $\pm\infty$ è

$$\tau_\infty = \int^\infty dx \, \frac{1}{\sqrt{2(E + -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \omega^2 \lambda \log(a-x))}} < \infty$$

poiché $(\omega^2 x^2/2 + \omega^2 \lambda \log(a-x)) \sim \omega^2 x^2/2$, quindi il moto non è definito globalmente.