

Esercizio 1

Un'asta sottile rigida omogenea AB di lunghezza l e massa m è posta in un piano verticale Π . Il suo centro C è libero di scorrere su un asse verticale y , il suo estremo A è connesso tramite una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla ad un asse orizzontale x e l'estremo B è connesso tramite una molla ideale con la stessa costante di richiamo K e lunghezza a riposo nulla all'asse y . Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo ϑ che AB forma con l'asse y e la coordinata y di C .

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
3. Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile.
4. Se il piano Π è posto in rotazione attorno all'asse verticale y con velocità angolare costante di modulo ω , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π .
5. Sempre nel caso del punto precedente, se il centro C è fissato nell'origine O , determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.

Esercizio 2

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è costituito da una circonferenza materiale rigida omogenea di massa M e raggio R e da un punto materiale di massa m . Un punto A della circonferenza è fissato ad un punto fisso O di un asse verticale y di Π , il punto materiale è vincolato allo stesso asse verticale y ed è collegato al centro C della circonferenza da una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata y del punto materiale calcolata a partire dal punto O , con l'asse y orientato verso il basso e l'angolo ϑ che AC forma con l'asse verticale.

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare le piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.
4. Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse verticale y con velocità angolare costante ω , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione.