

## Esercizio 1

Un'asta sottile rigida omogenea  $AB$  di lunghezza  $l$  e massa  $m$  è posta in un piano verticale  $\Pi$ . Il suo centro  $C$  è libero di scorrere su un asse verticale  $y$ , il suo estremo  $A$  è connesso tramite una molla ideale di costante di richiamo  $K > 0$  e lunghezza a riposo nulla ad un asse orizzontale  $x$  e l'estremo  $B$  è connesso tramite una molla ideale con la stessa costante di richiamo  $K$  e lunghezza a riposo nulla all'asse  $y$ . Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo  $\vartheta$  che  $AB$  forma con l'asse  $y$  e la coordinata  $y$  di  $C$ .

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
3. Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio stabile.
4. Se il piano  $\Pi$  è posto in rotazione attorno all'asse verticale  $y$  con velocità angolare costante di modulo  $\omega$ , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con  $\Pi$ .
5. Sempre nel caso del punto precedente, se il centro  $C$  è fissato nell'origine  $O$ , determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.

## Esercizio 2

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale  $\Pi$  è costituito da una circonferenza materiale rigida omogenea di massa  $M$  e raggio  $R$  e da un punto materiale di massa  $m$ . Un punto  $A$  della circonferenza è fissato ad un punto fisso  $O$  di un asse verticale  $y$  di  $\Pi$ , il punto materiale è vincolato allo stesso asse verticale  $y$  ed è collegato al centro  $C$  della circonferenza da una molla ideale di costante di richiamo  $K > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata  $y$  del punto materiale calcolata a partire dal punto  $O$ , con l'asse  $y$  orientato verso il basso e l'angolo  $\vartheta$  che  $AC$  forma con l'asse verticale.

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Studiare le piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.
4. Se il piano  $\Pi$  viene posto in rotazione attorno all'asse verticale  $y$  con velocità angolare costante  $\omega$ , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione.