Tutorato 5 - FM210

Soluzione Esercizio 1

1) Dal teorema di Koenig otteniamo per l'energia cinetica dell'asta

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

Il potenziale gravitazionale è $V_g = mgy$ e quello elastico, a meno di costanti, è $V_{el} = \frac{1}{2}K(y^2 + ly\cos\theta)$. La lagrangiana dunque è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 - mgy - \frac{1}{2}K(y^2 + ly\cos\theta)$$

con equazioni del moto:

$$m\ddot{y} = -mg - Ky - \frac{1}{2}Kl\cos\theta, \qquad \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta} = \frac{1}{2}Kly\sin\theta$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg + Ky + \frac{1}{2}Kl\cos\theta = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}Kly\sin\theta = 0$$

cioè i punti $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, con valori corrispondenti $y_1 = -\frac{mg}{K} - \frac{l}{2}$, $y_2 = -\frac{mg}{K} + \frac{l}{2}$ e se $\lambda := \frac{2mg}{Kl} < 1$ anche $\theta_{3,4} = \arccos(-\lambda)$ con $y_{3,4} = 0$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde nei diversi punti.

$$V"(\theta, y) = \begin{pmatrix} -\frac{Kly}{2}\cos\theta & \frac{Kl}{2}\sin\theta \\ \frac{Kl}{2}\sin\theta & K \end{pmatrix} \tag{1}$$

da cui :

$$V"(\theta_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{Kl}{2}(\frac{mg}{K} + \frac{l}{2}) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

e cioè il punto (θ_1, y_1) è stabile sempre.

$$V"(\theta_2, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{Kl}{2}(-\frac{mg}{K} + \frac{l}{2}) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

e cioè il punto (θ_2, y_2) è stabile per $\lambda < 1$ e instabile per $\lambda > 1$.

$$V"(\theta_{3,4}, y_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Kl}{2}\sin\theta_{3,4} \\ \frac{Kl}{2}\sin\theta_{3,4} & K \end{pmatrix}$$

e dunque $(\theta_{3,4}, y_{3,4})$, quando essitono come punti di equilibrio, sono instabili; per continuità per $\lambda = 1$ il punto (θ_2, y_2) è instabile.

3) Indicando le variabili lagrangiane con $\mathbf{q} = (\theta, y)$, intorno al punto di equilibrio stabile $\mathbf{q_0} = (\theta_1, y_1)$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni è:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\Big((\mathbf{q} - \mathbf{q_0}), V''(\theta_1, y_1))(\mathbf{q} - \mathbf{q_0})\Big)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

4) Calcoliamo i potenziale centrifugo:

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (s\sin\theta)^2 ds = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{ml^2}{12}\sin^2\theta$$

Dunque la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione è data da

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{ml^2}{12}\sin^2\theta$$

5) L'energia potenziale nel caso $y = 0$ è data da

$$V(\theta) = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{ml^2}{12}\sin^2\theta$$

dunque il moto è periodico sempre tranne per i dati iniziali:

$\theta(0) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ con $\dot{\theta}(0) = 0$, che corrispondono a punti di equilibrio;

$\theta(0), \dot{\theta}(0)$ corrispondenti a valori dell'energia

$$E = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\Big[\dot{\theta}(0)^2 - \omega^2\sin^2\theta(0)\Big] = 0,$$

che corrispondono a punti di equilibrio o a moti asintotici.

Soluzione Esercizio 2

1) L'energia cinetica si può calcolare utilizzando il teorema di Steiner. Osserviamo che, avendo orientato l'asse y verso il basso abbiamo:

$$x_C = R\sin\theta \qquad y_c = R\cos\theta$$

e dunque

$$T = \frac{1}{2}\Big(2MR^2\Big)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

L'energia potenziale è la somma del potenziale gravitazionale e di quello elastico

$$V = -mgy - MgR\cos\theta + \frac{1}{2}K(y^2 - 2Ry\cos\theta)$$

La lagrangiana è quindi:

$$\mathcal{L} = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy + MgR\cos\theta - \frac{1}{2}K(y^2 - 2Ry\cos\theta) \tag{2}$$

Le equazioni del moto sono:

$$2MR^2\ddot{\theta} = -MgR\sin\theta - KRy\sin\theta \tag{3}$$

$$m\ddot{y} = mg - Ky + KR\cos\theta \tag{4}$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = R\sin\theta(Mg + Ky) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Ky - KR\cos\theta - mg = 0 \tag{6}$$

da cui i punti critici:

$$(\theta_1, y_1) = (0, \frac{mg}{K} + R) \qquad (\theta_2, y_2) = (\pi, \frac{mg}{K} - R) \tag{7}$$

e se $\lambda := \frac{(M+m)g}{KR} < 1$ anche $(\theta_{3,4}, y_{3,4})$ con $\theta_{3,4} = \arccos(-\lambda)$ e $y_3 = y_4 = \frac{-Mg}{K}$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, y) = \begin{pmatrix} R\cos\theta(Mg + Ky) & KR\sin\theta \\ KR\sin\theta & K \end{pmatrix} \tag{8}$$

nei diversi punti critici.

$$V''(\theta_1, y_1) = \begin{pmatrix} R(Mg + mg + KR) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{9}$$

e dunque il punto di equilibrio (θ_1, y_1) è stabile;

$$V''(\theta_2, y_2) = \begin{pmatrix} -R(Mg + mg - KR) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{10}$$

che è instabile per $\lambda \geq 1$ e stabile per $\lambda < 1$. Per $\lambda < 1$ abbiamo per i punti $'(\theta_{3,4}, y_{3,4})$:

$$V''(\theta_{3,4}, y_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & \mp KR \sin\theta_{3,4} \\ \mp KR \sin\theta_{3,4} & K \end{pmatrix} \tag{11}$$

che ha determinante negativo e dunque i punti di equilibrio $(\theta_{3,4}, y_{3,4})$ sono instabili quando esistono.

3) La lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno al punto $\mathbf{x}_1 = (\theta_1, y_1)$ si può scrivere in forma vettoriale, con $\mathbf{x} = (\theta, y)$:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}, A\dot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), V"(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1))$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2MR^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

con pulsazioni proprie

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K(\lambda + 1)}{2M}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

4) Per calcolare la lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione bisogna sottrarre alla lagrangiana trovata al punto 1) il potenziale centrifugo che si ottiene calcolando

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho R \int_0^{2\pi} (R\sin\theta + R\cos\phi)^2 d\phi = -\frac{1}{2}\omega^2 m R^2 \sin^2\theta + cost$$