

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è formato da un disco sottile rigido omogeneo di raggio r e massa m e da un'asta sottile rigida omogenea AB di lunghezza l e massa M . L'asta ha gli estremi vincolati senza attrito ad una circonferenza fissa nel piano Π , di centro O e raggio $R = \frac{l}{\sqrt{2}}$ ed il disco rotola senza strisciare su di una retta verticale di equazione $x = -r$, avendo assunto O l'origine del sistema di riferimento. Il centro c del disco è collegato al centro C dell'asta da una molla ideale di costante di richiamo $2K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata y di c e l'angolo θ che OC forma con l'asse orizzontale x .

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
3. Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile e determinarne le pulsazioni.
4. Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante ω , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π e i nuovi punti di equilibrio.

Esercizio 2

Un sistema meccanico pesante, appartenente ad un piano verticale π , è costituito da un punto materiale P di massa m_1 e da un'asta omogenea AB di massa m_2 e lunghezza L . Il punto P è vincolato ad una retta orizzontale x del piano π ed il centro C dell'asta è vincolato ad una parabola di equazione $y = -ax^2$ con $a > 0$. I due punti P e C sono collegati da una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Utilizzare come variabili lagrangiane le coordinate x_1 e x_2 dei punti P e C rispettivamente e l'angolo θ che AB forma con la verticale.

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Determinare le variabili cicliche e gli integrali primi e calcolare la lagrangiana ridotta.
3. Per la lagrangiana ridotta determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei parametri.
4. Calcolare la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad un punto di equilibrio stabile del sistema.
5. Supponendo P fissato nell'origine, determinare i dati iniziali a cui fa seguito un moto periodico.

Esercizio 3

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta rigida sottile omogenea AB di massa m e lunghezza $l > R$. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare al di sotto di una retta orizzontale x del piano Π e l'asta ha l'estremo A vincolato senza attrito al centro C del disco e l'estremo B vincolato a scorrere senza attrito su di una retta verticale y del piano Π . Il punto C è collegato all'asse y da una molla ideale di costante $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. La molla lavora sempre in posizione orizzontale. Si consideri come variabile lagrangiana l'angolo θ che AB forma con l'asse x .

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
2. Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri.
3. Studiare l'approssimazione delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile del sistema e calcolarne il periodo.
4. Determinare i dati iniziali a cui fa seguito un moto periodico nel caso $mg > 2Kl$.
5. Se il piano Π è posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante ω , calcolare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in moto.