Tutorato 6 - FM210

Soluzione Esercizio 1

1) Abbiamo $OC = \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2} = \frac{l}{2}$, applicando il teorema di Koenig abbiamo

$$T_{disco} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2\frac{3}{2}$$

avendo usato la condizione di puro rotolamento $r\dot{\phi} = \dot{y}$ e

$$T_{asta} = \frac{1}{2}M\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\frac{1}{3}$$

e dunque otteniamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\frac{l^2}{3}\dot{\theta}^2 - mgy - Mg\frac{l}{2}\sin\theta - Ky^2 + Kly\sin\theta \qquad (1)$$

con equazioni del moto:

$$\frac{3}{2}m\ddot{y} = -mg - 2Ky + Kl\sin\theta \qquad M\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} = -Mg\frac{l}{2}\cos\theta + Kly\cos\theta \quad (2)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg + 2Ky - Kl\sin\theta = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (\frac{Mg}{2} - Ky)l\cos\theta = 0$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo i punti di equilibrio: $(y_1, \theta_1) = (\frac{Kl-mg}{2K}, \frac{\pi}{2})$ e $(y_2, \theta_2) = (-\frac{Kl+mg}{2K}, \frac{3\pi}{2})$. Se $\lambda := \frac{(m+M)g}{Kl} < 1$ abbiamo anche i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4}) = (\frac{Mg}{2K}, \arcsin\lambda)$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(y,\theta) = \begin{pmatrix} 2K & -Kl\cos\theta \\ -Kl\cos\theta & -l\sin\theta(\frac{Mg}{2} - Ky) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

nei diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(y_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} 2K & 0 \\ 0 & -l(\frac{(m+M)}{2}g - \frac{Kl}{2}) \end{pmatrix}$$

dunque il punto (y_1, θ_1) è stabile se $\lambda < 1$, instabile per $\lambda > 1$.

$$V''(y_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} 2K & 0 \\ 0 & l(\frac{(m+M)}{2}g + \frac{Kl}{2}) \end{pmatrix}$$

e dunque (y_2, θ_2) è stabile sempre. Se $\lambda < 1$ otteniamo:

$$V''(y_{3,4},\theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} 2K & -Kl\cos\theta_{3,4} \\ -Kl\cos\theta_{3,4} & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4})$ sono instabili. Per continuità nel caso $\lambda = 1$, il punto (y_1, θ_1) è instabile

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(y_2, \theta_2) =: \mathbf{q_0}$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y, \theta)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\Big((\mathbf{q}-\mathbf{q_0}), V''(\mathbf{q_0})(\mathbf{q}-\mathbf{q_0})\Big) \tag{4}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{3} \end{pmatrix}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(y_2,\theta_2) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} 2K - \omega^2\frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & l(\frac{(m+M)}{2}g + \frac{Kl}{2}) - \omega^2\frac{Ml^2}{3} \end{vmatrix}$$

da cui $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{K}{3m}}$ e $\omega_0 = \sqrt{3\frac{(m+M)g+Kl}{2Ml}}$.

4) La nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π e':

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - V_{centr} \tag{5}$$

con $V_{centr} = -\frac{1}{2}M\omega^2\frac{l^2}{6}\cos^2\theta$. I nuovi punti di equilibrio si ottengono dalle equazioni:

$$mg + 2Ky - Kl\sin\theta = 0 \qquad [Mg\frac{l}{2} - Kyl + M\omega^2\frac{l^2}{6}\sin\theta]\cos\theta = 0$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo gli stessi punti (y_1, θ_1) e (y_2, θ_2) di prima. Se $\lambda' := \frac{(m+M)g}{Kl - \omega^2 M\frac{l}{3}} < 1$ abbiamo anche i due punti: $(\lambda'\frac{l}{2} - \frac{mg}{2K}, \arcsin\lambda')$.

Soluzione Esercizio 2

1) Siano x_1, x_2 e θ le variabili lagrangiane, abbiamo $y_1 = 0$ e $y_2 = -ax_2^2$ ed utilizzando il teorema di Koenig abbiamo per l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1 + 4a^2x_2^2) + \frac{1}{2}\frac{m_2L^2}{12}\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale gravitazionale é

$$V_g = -m_2gax_2^2$$

e quella elastica

$$V_{el} = \frac{1}{2}K\Big((x_1 - x_2)^2 + a^2x_2^4\Big)$$

La lagrangiana è dunque:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1+4a^2x_2^2)+\frac{1}{2}\frac{m_2L^2}{12}\dot{\theta}^2+m_2gax_2^2-\frac{1}{2}K\Big((x_1-x_2)^2+a^2x_2^4\Big) \tag{6}$$

Le equazioni del moto sono:

$$m_1\ddot{x}_1 = -Kx_1 + Kx_2 \tag{7}$$

$$m_2\ddot{x}_2(1+4a^2x_2^2) = -4m_2a^2x_2\dot{x}_2^2+2m_2gax_2-K(x_1-x_2)+2Ka^2x_2^3 \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_2L^2}{12}\dot{\theta} = 0 \tag{9}$$

2) La variabile θ è ciclica e ne deriva $\frac{m_2L^2}{12}\dot{\theta} = p_\theta = cost$ costante. L'energia totale è anche costante poiché il sistema è conservativo. La lagrangiana ridotta risulta essere

$$\mathcal{L}_r = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1+4a^2x_2^2)+m_2gax_2^2-\frac{1}{2}K\Big((x_1-x_2)^2+a^2x_2^4\Big) \tag{10}$$

3) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = K(x_1 - x_2) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -2m_2gax_2 + Kx_2 - Kx_1 + 2Ka^2x_2^3 = 0 \tag{12}$$

da cui

$$x_1 = x_2 \tag{13}$$

e

$$2ax_2(Kax_2^2 - m_2g) = 0$$

e dunque i punti critici:

$$(0,0) \qquad (\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}) \tag{14}$$

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, x) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -2m_2ga + K + 6Ka^2x_2^2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

nei diversi punti critici.

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -2m_2ga + K \end{pmatrix} \tag{16}$$

che ha determinante negativo dunque il punto $(0,0)$ è instabile.

$$V''(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K + 4m_2ga \end{pmatrix} \tag{17}$$

ha determinante e traccia positivi e dunque questi due punti sono stabili.

4) Intorno a ciascuno dei due punti di equilibrio stabile $(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}})$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (x_1, x_2)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_\pm, V''(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_\pm)) \tag{18}$$

con $\mathbf{q}_\pm = (\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}})$

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2(1 + \frac{4am_2g}{K}) \end{pmatrix} \tag{19}$$

5) Discutiamo innanzi tutto la periodicitá del problema unidimensionale: se $x_1 = 0$ abbiamo:

$$V = -m_2gax_2^2 - \frac{1}{2}K\Big(x_2^2 + a^2x_2^4\Big)$$

Dobbiamo distinguere due casi

i) $2m_2ga > K$

ii) $2m_2ga \leq K$

Nel caso i) la funzione V ha un massimo in 0 e due minimi in $\pm\sqrt{\frac{2mga-K}{2Ka^2}}$ in questo caso gli unici dati iniziali cui non fa seguito un moto periodico sono quelli per cui l'energia totale é nulla oppure nei due punti di equilibrio $\pm\sqrt{\frac{2mga-K}{2Ka^2}}$ con velocitá iniziale nulla.

Nel caso ii) il potenziale é sempre positivo con unico punto critico in 0 e dunque l'unico dato iniziale cui non fa seguito un moto periodico é quello con energia totale nulla.

Per il problema nel suo complesso, in 2 dimensioni, considerando quindi anche la variabile θ, ai dati iniziali ricavati precedentemente per il problema unidimensionale fa seguito un moto periodico se si prende un dato iniziale $\dot\theta(0)$ tale che il periodo del moto di rotazione della sbarra $T_\theta = \frac{2\pi}{\dot\theta(0)}$ sia commensurabile col periodo T del problema unidimensionale discusso sopra, cioè $\dot\theta(0) = \frac{n}{m}\frac{2\pi}{T}$, con n, m interi. Sono anche periodici i dati iniziali corrispondenti a punti di equilibrio per il problema unidimensionale, per qualunque $\dot\theta(0) \neq 0$.

Soluzione Esercizio 3

1) Le coordinate del centro C del disco sono

$$x_C = l\cos\theta, \qquad y_C = -R$$

e quelle del baricentro dell'asta

$$x_G = \frac{l}{2}\cos\theta, \qquad y_G = -R + \frac{l}{2}\sin\theta$$

Dal teorema di Koenig otteniamo per l'energia cinetica dell'asta

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m(\frac{l}{2})^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\theta^2 \tag{20}$$

e per quella del disco

$$T_D = \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}(\frac{l\dot\theta}{R}\sin\theta)^2 = \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2\frac{3}{2}\sin^2\theta \tag{21}$$

dove abbiamo usato la relazione di rotolamento $\dot\phi = -\frac{l}{R}\dot\theta\sin\theta$.

Il potenziale gravitazionale è $V_g = mg\frac{l}{2}\sin\theta$ e quello elastico è $V_{el} = \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta$. La lagrangiana dunque è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2\frac{3}{2}\sin^2\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta \tag{22}$$

L' equazione del moto è:

$$
\begin{aligned}
&m\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{3}{2}Ml^2\ddot{\theta}\sin^2\theta + 3Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = \\
&= \frac{3}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - mg\frac{l}{2}\cos\theta + Kl^2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{23}
$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$
V'(\theta) = l\cos\theta[\frac{mg}{2} - Kl\sin\theta] = 0 \tag{24}
$$

cioè i punti $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\theta_2 = \frac{3}{2}\pi$, e se $\lambda := \frac{mg}{2Kl} < 1$ anche $\theta_{3,4} = \arcsin\lambda$.
Per studiare la stabilità valuto la derivata seconda nei diversi punti.

$$
V"(\theta) = -l\sin\theta[\frac{mg}{2} - Kl\sin\theta] - Kl^2\cos^2\theta \tag{25}
$$

da cui : $V"(\theta_1) = -[\frac{mgl}{2} - Kl^2]$ e cioè il punto θ_1 è stabile per $\lambda < 1$ e instabile per $\lambda > 1$; $V"(\theta_2) = [\frac{mgl}{2} + Kl^2] > 0$ e cioè il punto θ_2 è stabile sempre; $V"(\theta_{3,4}) = -Kl^2\cos^2\theta < 0$ e dunque $\theta_{3,4}$ sono instabili quando esistono; per continuità per $\lambda = 1$ il punto θ_1 è instabile.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile θ_2 la lagrangiana delle piccole oscillazioni è:

$$
\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\frac{3}{2} - \frac{1}{2}[\frac{mgl}{2} + Kl^2](\theta - \theta_2)^2 \tag{26}
$$

ed il periodo è dunque

$$
T_{po} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m}{3} + M\frac{3}{2}}{[\frac{mg}{2l} + K]}}
$$

.

4) L'energia potenziale nel caso $mg > 2Kl$ ha solo due punti critici: θ_1 che è un massimo e θ_2 che è un minimo che corrispondono ai valori del potenziale $\pm mg\frac{l}{2}$. I moti sono dunque periodici se si escludono i dati iniziali $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$ tali che l' energia totale

$$
E = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}(0)^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}(0)^2\frac{3}{2}\sin^2\theta(0) + mg\frac{l}{2}\sin\theta(0) + \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta(0)
$$

è uguale a $\pm mg\frac{l}{2}$.

5) Se il piano Π è posto in rotazione, la nuova lagrangiana, nel sistema di riferimento K solidale col piano, è

$$
\mathcal{L}_K = \mathcal{L} - V_{centr}
$$

con

$$V_{centr} = V_{centr,AB} + V_{centr,disco}$$

dove, per simmetria, per il disco vale

$$V_{centr,disco} = -\frac{1}{2}\omega^2 M l^2 \cos^2\theta$$

mentre per l'asta

$$V_{centr,AB} = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho \int_0^l ds (s\cos\theta)^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 m \cos^2\theta \frac{l^2}{3}.$$