PROVA SCRITTA DEL GENNAIO 1989

Un sistema materiale pesante appartenente ad un piano verticale π è costituito da un'asta di massa trascurabile e lunghezza l con un punto materiale P di massa M fissato ad un suo estremo e con l'altro estremo incernierato in un punto O di π, e da un punto materiale Q di massa m.

Q è vincolato ad appartenere sia all'asta che a una circonferenza di raggio $R < \frac{l}{2}$ e centro C passante per O (vedi figura). Il piano π ruota intorno alla verticale per O con velocità angolare costante ω.

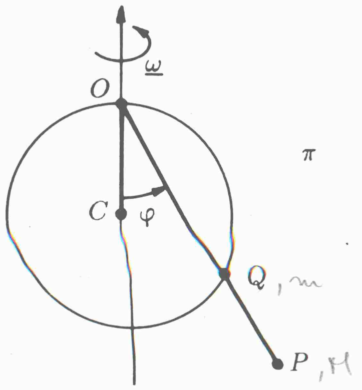


Figura 118

Si supponga assente ogni attrito e si assuma come parametro di posizione l'angolo φ che OP forma con la verticale e si consideri il moto del sistema rispetto ad un riferimento solidale con π. Si risponda alle seguenti domande:

1) Scrivere la lagrangiana e l'equazione di Lagrange.
2) Nel caso di massa m trascurabile determinare le posizioni di equilibrio discutendone la stabilità al variare di $\lambda = \frac{g}{\omega^2 l}$.
3) Sempre nel caso $m = 0$ si supponga $\omega^2 = 2\frac{g}{l}$ e di far partire il sistema dalla posizione $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Dire per quali valori di $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(t = 0)$ si ha moto oscillatorio e calcolare il periodo delle piccole oscillazioni.

Soluzione

1)

$$
\begin{aligned}
L = {} & \frac{1}{2} m R^2 4\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M l^2 \dot{\varphi}^2 + \\
& + mgR\cos 2\varphi + Mgl\cos\varphi + \\
& + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 (\sin 2\varphi)^2 + \frac{1}{2} M\omega^2 l^2 \sin^2\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4mR^2\ddot{\varphi} + Ml^2\ddot{\varphi} = {} & -2mgR\sin 2\varphi \\
& - Mgl\sin\varphi + m\omega^2 R^2 \sin 2\varphi \cdot 2 \cdot \cos 2\varphi \\
& + M\omega^2 l^2 \sin\varphi\cos\varphi
\end{aligned}
$$

2) $V = -Mgl.\cos\varphi - \frac{1}{2} M\omega^2 l^2 \sin^2\varphi$.

Equilibrio = stazionarietà del potenziale.

$$
\frac{dV}{d\varphi} = Mgl\sin\varphi - M\omega^2 l^2 \sin\varphi\cos\varphi
$$

$$
\frac{dV}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0 \quad , \quad \cos\varphi = \frac{g}{\omega^2 l}
$$

$$\varphi = \varphi_1 = 0 \quad , \quad \varphi = \varphi_2 = \pi \text{ sempre presenti}$$

$$\varphi = \varphi_{3,4} = \pm \arccos \frac{g}{\omega^2 l} \text{ presenti se e solo se } \frac{g}{\omega^2 l} \leq 1$$

Stabilità

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = Mgl \cos\varphi - M\omega^2 l^2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = -Mgl - M\omega^2 l^2 < 0 \text{ sempre}$$

$\Rightarrow \varphi = \pi$ è sempre instabile (V presenta un massimo).

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = Mgl - M\omega^2 l^2 > 0$$

se $\lambda = \frac{g}{\omega^2 l} > 1$.

Dunque se le posizioni φ_3, φ_4 *non* esistono $\varphi = 0$ è stabile (V presenta un minimo). Se $Mgl - M\omega^2 l^2 < 0$ allora $\varphi = 0$ è instabile. In questo caso: $\lambda < 1$

$$\left.\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_{3,4}} = -\frac{Mg^2}{\omega^2} + M\omega^2 l^2 > 0$$

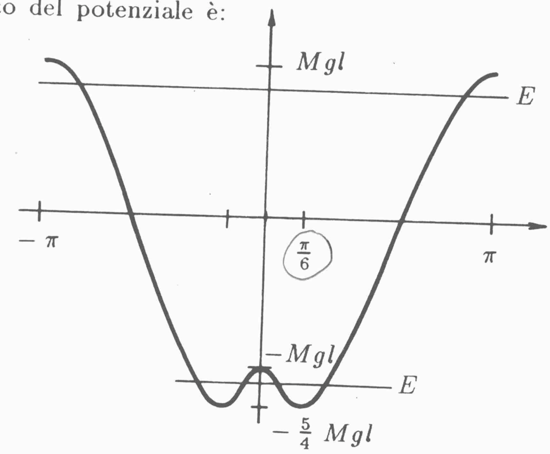
$\Rightarrow$ minimo $\Rightarrow$ stabili.

Nel caso $\lambda = 1 : \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ la prima derivata non nulla in $\varphi = 0$ è la quarta

$$\left.\frac{d^4V}{d\varphi^4}\right|_{\varphi=0} = 3Mgl > 0 \Rightarrow \text{minimo} \Rightarrow \text{stabile}$$

(Si poteva dedurre dall'analisi del grafico).

3) Il grafico del potenziale è:



$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

Figura 119

Il moto è oscillatorio per

$$0 < \frac{1}{2} M l^2 \dot{\varphi}_0^2 < \frac{1}{4} M g l$$

$$\frac{1}{4} M g l < \frac{1}{2} M l^2 \dot{\varphi}_0^2 < \frac{g}{4} M g l$$

Periodo p.o. $T = 2\pi \sqrt{\frac{M l^2}{V''(\pi/6)}} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{2}{\sqrt{3}}$.

PROVA SCRIT

Un sistema
nente ad un pia
da una lamina ri
lato $l = 2d$ e
materiale P di
vincolata a ruo
orizzontale passa
di uno dei suoi
vincolato a scorr
è attratto verso
$\underline{F} = -kOP, k >$
Si supponga
assumano come
della lamina pas
della lamina.

1) Scrivere la
2) Nel caso M
discuta la s
3) Sempre per
far partire
problema di

1)

$T = \frac{1}{2}$

$V = m$

$L = \frac{1}{2}$

$I = \int$

PROVA SCRITTA DEL LUGLIO 1990. I

In un piano Oxy due punti materiali P_1 e P_2, di masse m_1, m_2 sono vincolati, senza attrito, ai rami superiori delle iperboli di equazioni, rispettivamente, $y = \frac{a}{x}$, $y = -\frac{a}{x}$, $a > 0$. Essi sono collegati mediante una molla ideale di costante di richiamo $k > 0$. Si assumano come coordinate lagrangiane del sistema le ordinate y_1 e y_2 di P_1 e P_2 e si risponde alle seguenti domande:

1) nel caso in cui Oxy sia verticale scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
2) sempre nel caso Oxy verticale, sia $m_1 = m_2$. Determinare la posizione di equilibrio discutendone la stabilità;
3) nel caso in cui Oxy sia orizzontale e P_1 sia fisso nell'origine, mostrare che tutti i moti di P_2 sono oscillatori e determinare gli estremi di oscillazione al variare dell'energia.

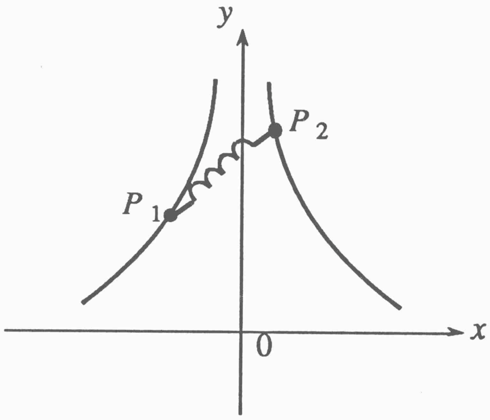


Figura 134

Soluzione

1)

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a}{y_1} \\ y_1 = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{a}{y_2} \\ y_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{a}{y_1^2}\,\dot{y}_1 \\ \dot{y}_1 = \dot{y}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{a}{y_2^2}\,\dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 = \dot{y}_2 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{a^2}{y_1^4}\right) \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{a^2}{y_2^4}\right) \dot{y}_2^2$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2}k \left[\left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{a^2}{y_1^4}\right) \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{a^2}{y_2^4}\right) \dot{y}_2^2 - m_1 g y_1 +$$

$$- m_2 g y_2 - \frac{1}{2} k \left[\left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -m_1 \frac{2a^2}{y_1^5} \dot{y}_1^2 - m_1 g + k \left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) \frac{a}{y_1^2}$$
$$- k(y_1 - y_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m_1 \left(1 + \frac{a^2}{y_1^4}\right) \dot{y}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = -m_2 \frac{2a^2}{y_2^5} \dot{y}_2^2 - m_2 g + k \left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) \frac{a}{y_2^2}$$
$$- k(y_2 - y_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m_2 \left(1 + \frac{a^2}{y_2^4}\right) \dot{y}_2 \ .$$

Equazioni di Lagrange

$$- 2m_1 \frac{a^2}{y_1^5} \dot{y}_1^2 + m_1 \left(1 + \frac{a^2}{y_1^4}\right) \ddot{y}_1 =$$
$$= -m_1 g + k \left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) \frac{a}{y_1^2} - k(y_1 - y_2)$$

$$- 2m_2 \frac{a^2}{y_2^5} \dot{y}_2^2 + m_2 \left(1 + \frac{a^2}{y_2^4}\right) \ddot{y}_2 =$$
$$= -m_2 g + k \left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) \frac{a}{y_2^2} - k(y_2 - y_1) \ .$$

Significato fisico (non richiesto)

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2}{y_1^3} \dot{y}_1^2 + \frac{a}{y^2 + 1} \ddot{y}_1 \qquad \underline{a}_1 \equiv (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1) \ .$$
$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_1$$

Versore tangente all'iperbole

$$\underline{t} \equiv \left(\frac{a}{y_1^2}\,,\,1\right)\left(\frac{1}{1+\frac{a^2}{y_1^4}}\right)^{1/2} .$$

I equazione intrinseca per il punto P_1

$$m_1 a_t^1 \equiv m_1 \underline{a}_1 \cdot \underline{t} = (-kP_2P_1 + m\underline{g}) \cdot \underline{t} \ .$$

Analogamente per P_2.

2) Equilibrio $\Longleftrightarrow$ stazionarietà di V:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2}\,k\left[\left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]$$

$m_1 = m_2 = m$

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = mg - k\left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)\frac{a}{y_1^2} + k(y_1 - y_2) = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y_2} = mg - k\left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)\frac{a}{y_2^2} + k(y_2 - y_1) = 0 \ .$$

Sottraendo membro a membro:

$$ka\left(\frac{a}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)\left(\frac{1}{y_2^2} - \frac{1}{y_1^2}\right) + 2k(y_1 - y_2) = 0$$

$$\left[ka^2\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right)\frac{y_1 + y_2}{y_1^2 y_2^2} + 2k\right](y_1 - y_2) = 0$$

la quantità entro parantesi quadra è sempre $> 0 \Rightarrow$ uniche soluzioni $y_1 = y_2 = y$

$$mg - \frac{2ka^2}{y^3} = 0 \Rightarrow y = \overline{y} \equiv \left(\frac{2ka^2}{mg}\right)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ la soluzione è unica.

Stabilità:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} = -ka^2\left(-\frac{3}{y_1^4} - \frac{2}{y_2 y_1^3}\right) + k$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} = -ka^2\left(-\frac{3}{y_2^4} - \frac{2}{y_1 y_2^3}\right) + k$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} = -\frac{ka^2}{y_1^2}\cdot\left(-\frac{1}{y_2^2}\right) - k$$

$$H(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2$$

$$H(y_1 = \overline{y}, y_2 = \overline{y}) =$$

$$\left(\frac{5ka^2}{\overline{y}^4} + k\right)^2 - \left(\frac{ka^2}{\overline{y}^4} - k\right)^2 > 0 \ .$$

Poiché $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} > 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = \overline{y}$ minimo relativo proprio per $V \Rightarrow$ equilibrio stabile.

3) Problema unidimensionale

$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{a^2}{y^2} + y^2\right) \ , \ V : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$$

$$\lim_{y \to \infty} V(y) = \infty \quad ; \qquad \lim_{y \to 0^+} V(y) = \infty$$

$$V' = \frac{1}{2} k \left(-\frac{2a^2}{y^3} + 2y\right)$$

$$V' = 0 \Rightarrow y^4 = a^2 \qquad y = +\sqrt{a} \ .$$

$V(\sqrt{a}) = ka$. Per $E = V_{\min} = ka$ si ha la quiete in $\sqrt{a}$

$\forall \ E > ka$ l'insieme $\Gamma(E) = \{y \in \mathbf{R}^+ : V(y) > E\}$ è costituito dall'intervallo $y_-(E)$, $y_+(E)$, con $V'(y_-(E)) < 0$, $V'(y_+(E)) > 0 \Rightarrow$ il moto è oscillatorio fra gli estremi $y_-(E)$ e $y_+(E)$. Essi sono dati dalle due soluzioni positive dell'equazione: $\frac{a^2}{y^2} + y^2 = \frac{2E}{k} \Rightarrow$

$$y_\pm = \sqrt{\frac{E}{k} \pm \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - a^2}} \ .$$

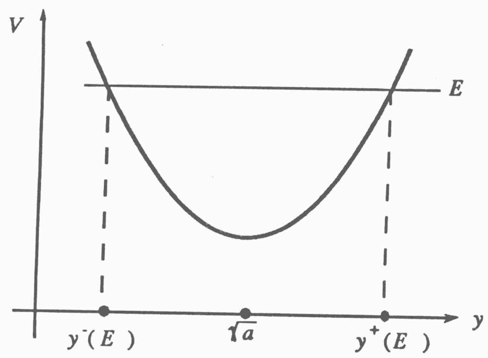


Figura 135

PROVA SCRITTA DEL LUGLIO 1990. II

In un piano verticale Oxy due punti materiali P_1, P_2 di masse $m_1 m_2$ sono vincolati, senza attrito, rispettivamente, all'asse y e al ramo superiore dell'iperbole $y = \frac{a}{x}$, $a > 0$. Essi sono collegati mediante una molla ideale di costante elastica $k > 0$. Si assumano come coordinate lagrangiane del sistema le ordinate y_1 e y_2 di P_1 e P_2 e si risponde alle seguenti domande;

1) scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange;
2) determinare la posizione di equilibrio discutendone la stabilità;
3) scrivere la lagrangiana dei piccoli moti attorno alla posizione di equilibrio stabile e, nel caso $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $g = 1, k = \frac{3}{2}$, determinare le pulsazioni proprie delle piccole oscillazioni.

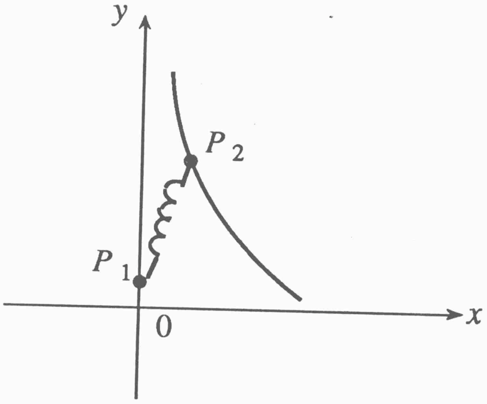


Figura 136

1)

$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$

T =

V =

L =

Equazioni di

$m_1 \ddot{y}_1$ =

$m_2 \Big(1$

2) Equilibrio $\Leftarrow$

$\Rightarrow \exists!$ soluzion

$\overline{y}_2 \equiv$

Soluzione

1)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{a}{y_2} \\ y_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{y}_1 = \dot{y}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{a}{y_2^2}\dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 = \dot{y}_2 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m^2\left(1 + \frac{a^2}{y_2^4}\right)\dot{y}_2^2$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2}k\left(\left(\frac{a^2}{y_2^2} + (y_1 - y_2)^2\right)\right)$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m^2\left(1 + \frac{a^2}{y_2^4}\right)\dot{y}_2^2 - m_1 g y_1 - m_2 g y_2 +$$
$$- \frac{1}{2}k\left(\frac{a^2}{y_2^2} + (y_2 - y_1)^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -m_1 g - k(y_1 - y_2)\ , \ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m_1\dot{y}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = m_2 g + \frac{ka^2}{y_2^3} - k(y_2 - y_1) - 2m_2\frac{a^2}{y_2^5}\dot{y}_2^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = m_2\left(1 + \frac{a^2}{y_2^4}\right)\dot{y}_2\ .$$

Equazioni di Lagrange

$$m_1\ddot{y}_1 = -m_1 g - k(y_1 - y_2)$$
$$m_2\left(1 + \frac{a^2}{y_2^4}\right)\ddot{y}_2 - 2m_2\frac{a^2}{y^5}\dot{y}_2^2 = -m_2 g + \frac{ka^2}{y_2^3} - k(y_2 - y_1)\ .$$

2) Equilibrio $\Longleftrightarrow$ stazionarietà di V

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = m_1 g + k(y_1 - y_2) = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y_2} = m_2 g - \frac{ka^2}{y_2^3} + k(y_2 - y_1) = 0$$
$$\Rightarrow (m_1 + m_2)g - \frac{ka^2}{y_2^3} = 0$$

$\Rightarrow \exists!$ soluzione $y_1 = \overline{y}_1$, $y_1 = \overline{y}_2$:

$$\overline{y}_2 \equiv \sqrt[3]{\frac{ka^2}{(m_1 + m_2)g}} \qquad \overline{y}_1 = \sqrt[3]{\frac{ka^2}{(m_1 + m_2)g}} - \frac{m_1 g}{k}\ .$$

Stabilità:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} = + \frac{3ka^2}{y_2^4} + k$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} = -k \ .$$

L'hessiano H è dato da

$$\left(\frac{3ka^2}{y_2^4} + k \right) k - k^2 > 0 \ .$$

Poiché $\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} = k > 0 \Rightarrow$ la posizione $(\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ è di minimo relativo proprio per $V \Rightarrow$ l'equilibrio è stabile.

3)

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(T_{11}\dot{\eta}_1^2 + T_{22}\dot{\eta}_2^2 + 2T_{12}\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2) - \frac{1}{2}(V_{11}\eta_1^2 + 2V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2)$$

$$\eta_1 = y_1 - \overline{y}_1 \ , \ \eta_2 = y_2 - \overline{y}_2 \ .$$

L'energia cinetica aveva originariamente la forma $T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} a_{hk}(y_1, y_2)\dot{y}_h \dot{y}_k$

$$T_{hk} = a_{hk}(\overline{y}_1, \overline{y}_2), \ h, k = 1, 2, \ (\dot{y}_1 = \dot{\eta}_1, \ \dot{y}_2 = \dot{\eta}_2)$$

$$\Rightarrow T_{11} = m_1 \quad T_{22} = m_2 \left(1 + \frac{a^2}{\overline{y}_2^4} \right) \ , \ T_{12} = 0$$

$$V_{hk} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_h \partial y_k} \right|_{\substack{y_1 = \overline{y}_2 \\ y_2 = \overline{y}_2}} \ , \ h, k = 1, 2$$

$$V_{11} = k \qquad V_{12} = -k \qquad V_{22} = k \left(1 + \frac{3a^2}{\overline{y}_2^4} \right) \ .$$

Per $m_1 = 1 \, , m_2 = \frac{1}{2}, \ g = 1 \, , a = 1 \, , k = \frac{3}{2}$ si ha: $\overline{y}_2 = 1 \Rightarrow$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ -3/2 & 6 \ . \end{pmatrix}$$

Pulsazioni proprie $\omega : \lambda = \omega^2$

$$\det \begin{pmatrix} 3/2 - \lambda & -3/2 \\ -3/2 & 6 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{15}{2}\lambda + 27 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{15 - \sqrt{117}}}{2} \qquad \omega_2 = \frac{\sqrt{15 + \sqrt{117}}}{2}$$

PROVA SCRITTA DELL'OTTOBRE 1990

Un punto materiale pesante P di massa m è vincolato bilateralmente, in assenza di attrito, al paraboloide di equazione $z = a(x^2 + y^2)$, ($a > 0$, z verticale discendente, x e y orizzontali; vedi figura). P è collegato, mediante una molla ideale di costante di richiamo $k > 0$ all'origine O.

Si assumano come coordinate lagrangiane la distanza ρ di P dell'asse z e l'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ che $O\overline{P}$ forma con l'asse x. ($\overline{P} = (x, y, 0)$ è la proiezione di P sul piano orizzontale Oxy); si risponda alle seguenti domande;

1) scrivere la lagrangiana, le equazioni di Lagrange e dedurre, dalla forma della lagrangiana le costanti del moto;
2) per $\lambda \equiv \frac{mga}{k} = \frac{1}{2}$ sia, a $t = 0$, $\rho(0) = \rho_0 > 0$, $\theta(0) = \theta_0$; determinare $\dot{\rho}_0$ e $\dot{\theta}_0$ in modo tale che il moto fa seguito al dato iniziale $\rho_0 \theta_0$, $\dot{\rho}_0 \dot{\theta}_0$ sia circolare uniforme su una circonferenza orizzontale di raggio ρ_0 e centro sull'asse z;
3) supponiamo di introdurre su P l'ulteriore vincolo di appartenenza al piano xz.
   Discutere, al variare di $\lambda \equiv \frac{mga}{k}$, l'esistenza di moti non periodici.

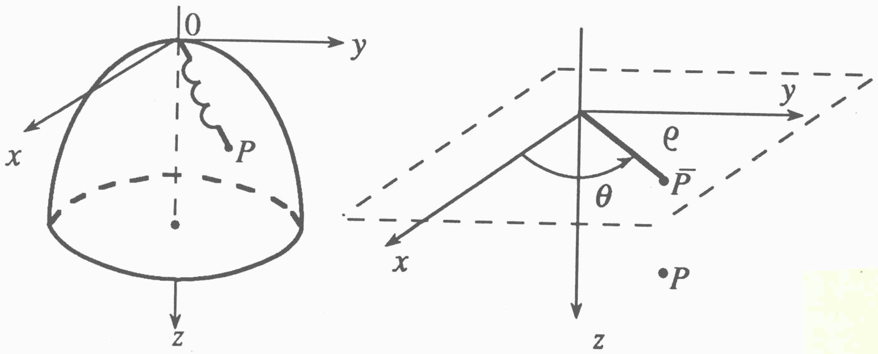


Figura 138

Soluzione

1) Equazione del vincolo in coordinate cilindriche $z = a\rho^2 \Rightarrow \dot z = 2a\rho\dot\rho$.
Espressione generale dell'energia cinetica in coordinate cilindriche:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + \dot z^2) \ .$$

Nel nostro caso:

$$T = \frac{1}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + 4a^2\rho^2\dot\rho^2) \ .$$

Energia potenziale

$$V = \frac{1}{2}k\overline{OP}^2 - mgz \Rightarrow$$
$$V = \frac{1}{2}k(\rho^2 + a^2\rho^4) - mga\rho^2$$

$$L = \frac{1}{2}m([1+4a^2\rho^2]\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2) - \frac{k}{2}(\rho^2 + a^2\rho^4) + mga\rho^2$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = m\rho^2\dot\theta \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot\rho} = m(1+4a^2\rho^2)\dot\rho$$
$$\frac{\partial L}{\partial\rho} = \frac{m}{2}4\cdot 2\cdot a^2\rho\dot\rho^2 + \frac{m}{2}2\rho\dot\theta^2 - \frac{k}{2}(2\rho + 4a^2\rho^3) + 2mga\rho \ .$$

Equazioni di Lagrange:

$$2m\rho\dot\rho\dot\theta + m\rho^2\ddot\theta = 0$$
$$m(1+4a^2\rho^2)\ddot\rho + m\cdot 8\cdot a^2\rho\cdot\dot\rho^2 =$$
$$= 4ma^2\rho\dot\rho^2 + m\rho\dot\theta^2 - k(\rho + 2a^2\rho^3) + 2mga\rho$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m\rho\cdot\dot\rho\cdot\dot\theta + m\rho^2\ddot\theta = 0 \\ m(1+4a^2\rho^2)\ddot\rho + 4ma^2\rho\dot\rho^2 - m\rho\dot\theta^2 = \\ \quad = -k(\rho + 2a^2\rho^3) + 2mga\rho \ . \end{cases}$$

Poiché L non dipende esplicitamente né da t né da θ si conservano l'energia totale meccanica (in quanto essa coincide con l'energia generalizzata $\mathcal{H}$ dal momento che i vincoli sono fissi):

$$\frac{1}{2}m([1+4a^2\rho^2]\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2) + \frac{k}{2}(\rho^2 + a^2\rho^4) - mga\rho^2 = E$$

e il momento angolare assiale rispetto all'asse z (che coincide con il momento cinetico coniugato alla variabile ciclica θ)

$$m\rho^2\dot\theta = J \ .$$

2) Utilizzando i due integrali primi del moto ci riduciamo al problema unidimensionale radiale con potenziale:

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{k}{2} a^2 \rho^4 + \frac{J^2}{2m\rho^2}$$

$$\lim_{\rho \to 0+} V_{\text{eff}}(\rho) = \lim_{\rho \to \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = 2ka^2\rho^3 - \frac{J^2}{m\rho^3}$$

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \overline{\rho} = \left(\frac{J^2}{2kma^2}\right)^{1/6} = \text{punto di minimo relativo e assoluto .}$$

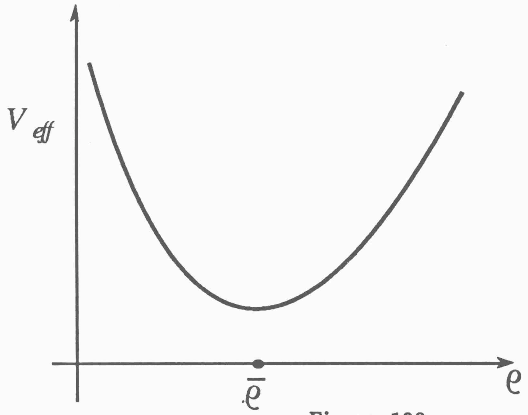


Figura 139

Si ha moto circolare uniforme se il dato iniziale è tale che $E = V_{\text{eff}}(\overline{\rho})$ cioè: $\dot{\rho}_0 = 0$ e J tale che $\rho_0 = \left(\frac{J^2}{2kma^2}\right)^{1/6}$ cioè

$$\dot{\rho}_0 = 0 \qquad \dot{\theta}_0 = \pm\sqrt{\frac{2ka^2}{m}\rho_0^2} \ .$$

3) Abbiamo un problema unidimensionale: il moto di P sulla parabola di equazione $z = ax^2$ contenuta nel piano verticale Oxz.
Il potenziale, espresso nell'unica variabile x ha la forma

$$V = \frac{1}{2}k(x^2 + a^2x^4) - mgax^2$$

$$\rho = |x| \ .$$

Se $\frac{k}{2} < mga \Longleftrightarrow \lambda > \frac{1}{2}$ il grafico di V ha la forma:

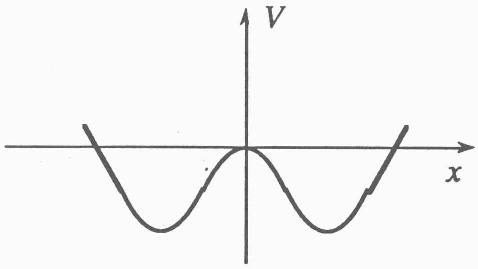


Figura 140

Se, invece, $\frac{k}{2} \geq mga$ si ha:

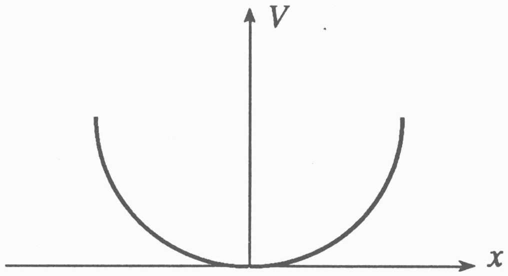


Figura 141

Per cui per $\lambda \leq \frac{1}{2}$ ogni moto (che non si riduca alla quiete) è oscillatorio; mentre per $\lambda > \frac{1}{2}$ se $E = 0$ si ha moto asintotico.