

FM510 - II parte

Lezione 1

Introduzione al corso

Costruzione di modelli matematici in alcuni esempi:

- problemi di diffusione di un contagio o di una opinione
- problemi di campionamento
- problemi di ottimizzazione
- problemi dalla fisica: transizioni di fase

Strumenti matematici necessari e contenuto del corso

Referenze: Slides in rete

Lezione 2

Richiami di probabilità e sistemi dinamici

- spazi e misure di probabilità
- variabili aleatorie (osservabili) e loro proprietà
- indipendenza, variabili i.i.d., legge dei grandi numeri (LLN)
- applicazioni della LLN, metodo Monte Carlo, esempio ago di Buffon
- entropia di una distribuzione e sue proprietà, suo significato fisico e teorema di McMillan (senza dim.)
- flussi e misure invarianti
- media temporale e media spaziale di un'osservabile
- Teorema di Birkhoff (senza dim)
- ergodicità e indecomponibilità

Referenze: Slides in rete, vd anche Levin, Peres, Wilmer “Markov chain and mixing times”

Lezione 3

Evoluzione stocastica e catene di Markov

- matrice di transizione, misura invariante (o stazionaria), irriducibilità e aperiodicità
- simulazione di una catena di Markov
- distanza in variazione totale tra misure
- teorema di convergenza per catene irriducibili e aperiodiche (con dim.)
- reversibilità e bilancio dettagliato
- esempi: RW su grafo, processo nascita e morte, urna Ehrenfest, RW su ipercubo,...

Referenze: Häggström cap. 5, 6, vd anche Levin, Peres, Wilmer

Lezione 4

Richiami di meccanica statistica

- dalle equazioni di Hamilton alla meccanica statistica
- misura di probabilità sullo spazio delle fasi, ensemble statistici e misura di Gibbs, funzione di partizione
- modello di Ising per sistemi magnetici
- modello di gas su reticolo
- dinamiche stocastiche per modelli di meccanica statistica

Referenze: S.Freidli and Y.Velenik : Statistical Mechanics of Lattice Systems - A concrete mathematical introduction. cap 1- In rete

Lezione 5

Modello di Curie-Weiss

- Calcolo dell' energia libera
- Transizione di fase ad $h = 0$
- Caso $h \neq 0$
- Dinamica stocastica per CW, metastabilità

Referenze:S.Freidli and Y.Velenik : Statistical Mechanics of Lattice Systems - A concrete mathematical introduction. cap 2-In rete

Lezione 6

Random Cluster Model

- definizione di RCM e modello di Potts
- Caso $q = 1$ percolazione
- Accoppiamento (Fortuin-Kasteleyn)
- Correlazione e connessione
- Ordinamento stocastico
- RCM su grafi infiniti
- Transizione di fase per $q \geq 1$
- Caso $d = 2$ autodualità
- Calcolo della probabilità critica

Referenze: Grimmett “The random cluster model” (grimmett_RCM nel dropbox/articoli) e libro di Grimmett (nel dropbox/libri)

Lezione 7

Markov Chain Monte Carlo

- Modello hard-core
- q -coloring
- costruzione di algoritmi MCMC, Gibbs samplers e algoritmo Metropolis

Lezione 8

Dinamiche parallele

- Dinamica di Swendsen-Wang
- Dinamiche parallele, PCA
- Dinamiche alternate

Referenze: Häggström cap. 7, vd anche Levin, Peres, Wilmer cap 3

Lezione 9

Mixing veloce e stime del tempo di mixing

Lezione 10

Propp-Wilson e sandwiching

Lezione 11

Modello di Hopfield