Scritto di Istituzioni di Matematica del 11 - 9 - 2018

E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Risolvere il sistema di tre equazioni in due incognite:

$$\begin{array}{rcl} x+2y & = & 2 \\ 2x+y & = & 3 \\ 4x+5y & = & 7 \end{array}$$

Il rango della matrice incompleta è uguale a quello della matrice completa, uguale a 2, e dunque per il teorema di Rouchè-Capelli esiste un'unica soluzione:

$$x = 4/3, \qquad y = 1/3.$$

Vedi esercizio 5.40 di Esercizi di Matematica, Marcellini Sbordone, tomo 1 pg. 142

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos x} = 0$$

Si tratta di un limite banale che non coinvolge forme indeterminate.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\Big(1-1/x\Big)^x}{\Big(1+3/x\Big)^x} = e^{-4}$$

Esercizio 3

Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione:

$$f(x) = \sqrt{1+x^5} - \sqrt{1-x^5}$$

L'ordine di infinitesimo è 5. Vedi esercizio 8.68 (a) di Esercizi di Matematica, Marcellini Sbordone, tomo 2 pg 74

Parte II

Esercizio 1

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx = x - \log(1+e^x) + c$$

Vedi esercizio 4.111 (a) di Esercizi di Matematica, Marcellini Sbordone, tomo 4 pg 54.

$$\int \frac{x+3}{x^2-6x}dx = -\frac{1}{2}\log|x| + \frac{3}{2}\log|x-6| + c$$

Vedi esercizio 4.96 (a) di Esercizi di Matematica, Marcellini Sbordone, tomo 4 pg.42

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

Vedi esercizio 2.53 (a) di Esercizi di Matematica, Marcellini Sbordone, tomo 3 pg 82

Scritto di Matematica ed Elementi di Analisi del 11 - 9 - 2018
E. Scoppola

Esercizio 3

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Infatti $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$.

Esercizio 4

Determinare la soluzione del problema:

$$y' = 3x^2 y, \quad y(0) = 1$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili con soluzione

$$y = e^{x^3}$$

Esercizio 5

Determinare la soluzione del problema:

$$\partial_x f(x,y) + 2\partial_y f(x,y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(x,0) = e^x$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti che si integra col cambiamento di variabili

$$u = x + \frac{y}{2}, \qquad v = x - \frac{y}{2}$$

In queste variabili l'equazione diventa

$$\partial_u f(u,v) = 0$$

e dunque $f(u,v) = c(v) = c(x - \frac{y}{2})$ e dalla condizione al bordo si determina la funzione $c(v)$ e dunque la soluzione

$$f(x,y) = e^{x-\frac{y}{2}}.$$