Scritto di Istituzioni di Matematica del 12 - 7 - 2017

E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y + 4z &= 7 \\ x - y + z &= 2 \end{cases}$$

Il sistema lineare non ha soluzioni infatti, utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, abbiamo che il rango della matrice dei coefficienti è 2 mentre il rango della matrice completa è 3.

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Vedi Marcellini-Sbordone esrcizio 8.45 tomo II

$$\lim_{x\to 0} \Big(\cos x\Big)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/2}$$

Vedi Marcellini-Sbordone esrcizio 8.50 tomo II

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x + \cos x}} = 0$$

Vedi Marcellini-Sbordone esrcizio 8.57 tomo II

Parte II

Esercizio 1

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = 2$$

Vedi Marcellini-Sbordone esrcizio 5.51 tomo IV

$$\int \frac{3x+5}{x^2-2x+1}\,dx = 3\log|x-1| - \frac{8}{x-1} + c$$

Vedi Marcellini-Sbordone esrcizio 4.140 tomo IV

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\log|x| - 4\sqrt{x} + c$$

Vedi Marcellini-Sbordone esrcizio pg 4.152 tomo IV

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x}$$

Vedi Marcellini-Sbordone esrcizio 2.53 pg 82 tomo III

Esercizi aggiuntivi nello Scritto di Matematica e di Elementi di Analisi del 12 - 7 - 2017

Esercizio 5

Sviluppare in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$ la funzione periodica

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ 2x & \text{per } x \in [0,\pi) \end{cases}$$

Otteniamo

$$f(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - 3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$$

infatti:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_0^{\pi} 2xdx\Big) = \frac{1}{2\pi}\Big(-\frac{\pi^2}{2} + 2\frac{\pi^2}{2}\Big) = \frac{1}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} 2x\cos nx dx\Big)$$

Calcoliamo, integrando per parti, l'integrale

$$\int_a^b x\cos nx dx = x\frac{\sin nx}{n}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\sin nx}{n} dx = x\frac{\sin nx}{n}\Big|_a^b + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_a^b \tag{1}$$

Considerando che $\sin n\pi = 0$ per ogni n e che $\cos n\pi = \cos(-n\pi) = (-1)^n$ otteniamo che $a_n = 0$ per n pari mentre per n dispari abbiamo

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\Big(2-4\Big) = -\frac{2}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} x\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} 2x\sin nx dx\Big)$$

Calcoliamo, integrando per parti, l'integrale

$$\int_a^b x\sin nx dx = -x\frac{\cos nx}{n}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos nx}{n} dx = -x\frac{\cos nx}{n}\Big|_a^b + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_a^b \tag{2}$$

e dunque

$$b_n = \frac{1}{\pi}\Big(- x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - 2x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\Big) = -3\frac{(-1)^n}{n}$$

Esercizio 6

Determinare la soluzione del problema:

$$y" + 4y = \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

La soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_{omog} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

Cerco una soluzione particolare della forma $A\cos x + B\sin x$ ottenendo

$$y_{part} = \frac{1}{3}\cos x$$

e dunque

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x$$

e che con i dati iniziali otteniamo

$$y = \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos x$$