Scritto di Istituzioni di Matematica del 12 - 7 - 2018

E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Dati i vettori $\mathbf{u} = (0, 3)$ e $\mathbf{v} = (2, 0)$ nel piano x, y abbiamo

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-2, 3), \qquad \mathbf{u}.\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -6\hat{k}$$

infatti i vettori sono ortogonali e l'angolo tra essi compreso vale $-\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^2(x^2 + 4x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{x - 3}} = \lim_{x\to 4} \frac{4 - x}{4 - x} \times \frac{1 + \sqrt{x - 3}}{3 + \sqrt{5 + x}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{(1 - 1/x)^x}{(1 + 3/x)^x} = e^{-4}$$

Parte II

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx$$

La funzione integranda è una funzione razionale, otteniamo:

$$\frac{x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2}$$

con $A = 1$ e $B = 2$ e dunque

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{dx}{x - 2} + 2 \int \frac{dx}{(x - 2)^2} = \log|x - 2| - \frac{2}{x - 2} + C$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x)^{3/2}}$$

Si tratta di un integrale improprio perché la funzione integranda diverge ad un estremo. Passando alla variabile $y = 1 - x$ abbiamo:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{3/2}} = \lim_{h \to 0^+} \int_h^1 \frac{dy}{y^{3/2}} = \lim_{h \to 0^+} -2y^{-1/2}\Big|_h^1 = \infty$$

Dunque l'integrale diverge.

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = x^2(x^2 - 2)$$

Vedi libro di esercizi Marcellini Sbordone, Tomo 3, esercizio 2.34 (b) pg 62

Scritto di Metodi Matematici per l'Ottica del 12 - 7 - 2018

E. Scoppola

Esercizio 1

Studiare la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^b$$

al variare di a e b in $\mathbb{R}$.

Se $a = 0$ abbiamo $S = 0$. Per $a \neq 0$ abbiamo

$$S = a^b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^b$$

cioè una serie armonica generalizzata che diverge per $b \leq 1$ e converge per $b > 1$.

Esercizio 2

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \log(1 + x) - \log(1 - x)$$

$$f(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Calcoliamo le due serie di Taylor relative rispettivamente a $\log(1+x)$ e a $-\log(1-x)$ integrando rispettivamente le serie geometriche di ragione $-x$ e x. Otteniamo

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

da cui

$$f(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Esercizio 3

Determinare la soluzione del problema:

$$y" + 4y = \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

La soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_{omog} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Cerco una soluzione particolare della forma $A\cos x + B \sin x$ ottenendo

$$y_{part} = \frac{1}{3}\cos x$$

e dunque

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\cos x$$

e che con i dati iniziali otteniamo

$$y = \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos x$$

Esercizio 4

Determinare la soluzione del problema:

$$2\partial_x f(x,y) - 4\partial_y f(x,y) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(x,0) = x$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea del prim'ordine che possiamo risolvere passando alle variabili $u = \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$ e $v = \frac{x}{2} + \frac{y}{4}$. In queste variabili l'equazione diventa

$$\partial_u f = 0$$

e dunque $f(x,y) = f(v(x,y)) = f(\frac{x}{2} + \frac{y}{4})$. Considerando la condizione al bordo otteniamo

$$f(x,y) = \frac{1}{2}y + x$$