Scritto di Istituzioni di Matematica del 16 - 7 - 2019

E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Determinare il rango della seguente matrice al variare del valore del parametro λ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Il rango è tre per ogni valore di λ. Infatti

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \cos n \log n}{n} = 2$$

vedi esercizio analogo 7.67 b tomo II

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)^{\log x \frac{x}{\log x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{\sin 5x}{\sin x} = 5$$

Parte II

Esercizio 1

$$\int \frac{3x+1}{x^2-6x+5}\,dx = \int \Big(\frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1}\Big) dx$$

con A e B tali che

$$3x+1 = A(x-1) + B(x-5)$$

e dunque $A = 4$ e $B = -1$. Otteniamo dunque

$$\int \frac{3x+1}{x^2-6x+5}\,dx = 4\int \frac{1}{x-5}dx - \int \frac{1}{x-1}dx = 4\log|x-5| - \log|x-1| + c.$$

$$\int_1^2 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^4 e^y dy = \frac{1}{2}\Big(e^4 - e\Big)$$

avendo considerato il cambiamento di variabile $x \to y = x^2$.

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{x - x^2}$$

vedi Marcellini Sbordone - Esercizi tomo 3 esercizio 2.58 a pg 86.

Scritto di Matematica e di Elementi di Analisi del 16 - 7- 2019
E. Scoppola

Esercizio 4

Determinare la soluzione del problema:

$$y" + 4y = \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

La soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_{omog} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Cerco una soluzione particolare della forma $A\cos x + B\sin x$ ottenendo

$$y_{part} = \frac{1}{3}\cos x$$

e dunque

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x$$

e che con i dati iniziali otteniamo

$$y = \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos x$$

Esercizio 5

Studiare la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^b$$

al variare di a e b in $\mathbb{R}$.

Se $a = 0$ abbiamo $S = 0$. Per $a \neq 0$ abbiamo

$$S = a^b\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^b$$

cioè una serie armonica generalizzata che diverge per $b \leq 1$ e converge per $b > 1$.

Esercizio 6

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$$

Calcoliamo le due serie di Taylor relative rispettivamente a $\log(1+x)$ ed a $-\log(1-x)$ integrando rispettivamente le serie geometriche di ragione $-x$ e x. Otteniamo

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

da cui

$$f(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$