Scritto di Istituzioni di Matematica del 17 - 9 - 2019
E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Dato il vettore **u**$= (1, 3)$

1) determinare un vettore di lunghezza unitaria parallelo a **u**;
2) determinare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ il vettore $(2, a)$ è ortogonale a **u**.

Soluzione:

1) Il vettore di lunghezza unitaria parallelo a **u** ha componenti $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$.
2) Il vettore $(2, a)$ è ortogonale a **u** se $2 + 3a = 0$ dunque per $a = -2/3$.

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x - 1 + 1)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} = -1/2$$

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{x+3}{x+2}\Big)^x = \lim_{x\to\infty} \Big[\Big(1 + \frac{1}{x+2}\Big)^{x+2}\Big]^{\frac{x}{x+2}} = e$$

Esercizio 3

Determinare se la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

può essere prolungata per continuità a tutto l'asse reale.

Soluzione:
La funzione $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. In $x = 0$ non è definita ma può essere prolungata per continuità imponendo $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Parte II

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \sqrt{x+1}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + C$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int_1^2 (x-1)\log x\,dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 \log x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\Big[\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx\Big] = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

Vedi libro di Esercizi di Marcellini-Sbordone , tomo 3 esercizio 2.76 a pg 104

Scritto di Matematica e di Elementi di Analisi del 17 - 9- 2019

E. Scoppola

Esercizio 4

Determinare il carattere della serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{n!}{n^n}.$$

Si tratta di una serie a termini positivi, dal criterio del rapporto otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n = \frac{4}{3}e^{-1} < 1$$

dunque la serie converge.

Esercizio 5

Determinare la soluzione dell'equazione

$$y' = -y - xy^2$$

con $y(0) = 1$.

Si tratta di un'equazione di Bernoulli che si risolve col cambiamento di variabile $z = y^{-1}$. Nella variabile z l'equazione diventa

$$z' = z + x$$

che ha soluzione

$$z = e^x C - x - 1.$$

Dal dato iniziale ricaviamo $C = 2$ e dunque

$$y(x) = (2e^x - x - 1)^{-1}.$$