Scritto di Istituzioni di Matematica del 19 - 2 - 2019

E. Scoppola, V.Apollonio

Parte I

Esercizio 1

Determinare il rango della seguente matrice al variare del parametro λ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $det A = -\lambda - 2$. Dunque il rango è uguale a 3 se $\lambda \neq -2$. Per $\lambda = -2$ abbiamo rango uguale a 2.

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^{x-1+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\log(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = 0$$

Parte II

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int x^2 \log x \, dx$$

Si può integrare per parti:

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx = x - \log(1+e^x) + C$$

Esercizio 2

Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

La funzione ha solo asintoti obliqui: $y = x$ per $x \to \infty$ e $y = -x$ per $x \to -\infty$.

Vedi libro di esercizi Marcellini Sbordone, Tomo 3, esercizio 2.32 pg 55

Scritto di Matematica ed Elementi di Analisi del 19 - 2 - 2019

E. Scoppola

Esercizio 5

Sviluppare in serie di Taylor intorno a $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

Abbiamo le serie di Taylor:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e dunque

$$\sin x + \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right]$$

Esercizio 6

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = y + \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1$$

Si tratta di un'equazione lineare con $a(x) = 1$ e $b(x) = \cos x$. Dalla soluzione generale, integrando per parti, otteniamo subito la soluzione generale

$$y(x) = e^x \left(C + e^{-x} \frac{\sin x - \cos x}{2} \right)$$

ed utilizzando la condizione iniziale otteniamo la soluzione al problema di Cauchy:

$$y(x) = \frac{3}{2} e^x + \frac{\sin x - \cos x}{2}$$