Scritto di Istituzioni di Matematica del 19 - 6 - 2018

E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Determinare il rango della seguente matrice al variare del valore del parametro λ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Il rango è tre per ogni valore di λ. Infatti

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \cos n \log n}{n} = 2$$

vedi esercizio analogo 7.67 b tomo II

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)^{\log x \frac{x}{\log x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{\sin 5x}{\sin x} = 5$$

vedi esercizio analogo 8.41 b tomo II

Parte II

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x}\,dx = \int \Big(\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x}\Big)dx$$

con A e B tali che

$$x+3 = Ax + B(x-3)$$

e dunque $A = 2$ e $B = -1$. Da cui

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x}\,dx = \int \frac{2}{x-3}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = 2\log|x-3| - \log|x| + C$$

$$\int_1^2 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 e^y\,dy = \frac{1}{2}\Big(e^4 - e\Big)$$

avendo considerato il cambiamento di variabile $x \to y = x^2$.

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{x - x^2}$$

vedi Marcellini Sbordone - Esercizi tomo 3 esercizio 2.58 a pg 86.

Scritto di Matematica del 19 - 6 - 2018

Esercizio 5

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = \frac{y}{x} + x^3, \qquad \text{con} \qquad y(1) = 0$$

E' un'equazione lineare del prim' ordine con $a(x) = \frac{1}{x}$, con primitiva $A(x) = \log x$, e $b(x) = x^3$ e dunque applicando la formula per le soluzioni delle equazioni lineari otteniamo

$$y(x) = x\Big(C + \int \frac{1}{x}x^3\,dx\Big) = x(C + \frac{x^3}{3}).$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $0 = C + \frac{1}{3}$ e dunque $C = -\frac{1}{3}$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x}{3}(-1 + x^3).$$

Esercizio 6

Calcolare la somma delle seguenti serie:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\,.\,2^n}{e^n}, \qquad S_2 = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{n!}$$

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\,.\,2^n}{e^n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

dunque una serie geometrica di ragione $2/e < 1$ e dunque convergente a:

$$S_1 = \frac{3}{1 - 2/e}.$$

$$S_2 = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{n!} = 2\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - (2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6})\Big) \simeq 2\Big(e - 2.66\Big)$$

Esercizio 7

Sviluppare in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione periodica

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ 3x & \text{per } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Per una funzione periodica in $[-\pi, \pi]$ abbiamo

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

con

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$$

In questo caso

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad a_k = \frac{4}{\pi k^2} \mathbb{1}_{\{k\ dispari\}}, \qquad b_k = (-1)^{k-1} \frac{4}{k}$$