Scritto di Istituzioni di Matematica del 20 - 9 - 2017
E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Utilizzando le proprietà dei determinanti, si ottiene che

$$\begin{vmatrix} 2\lambda-1 & 2-2\lambda & 2\lambda-2 \\ 2\lambda-2 & 3-2\lambda & 2\lambda-2 \\ \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda-1 & 0 & 2\lambda-2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda$$

e dunque il determinante è nullo se e solo se $\lambda = 0$.

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + \sin n \log n}{n} = 2$$

vedi esercizio 7.67 b tomo II

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)^{\log x \frac{x}{\log x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan x} = 4$$

vedi esercizio 8.41 b tomo II

Parte II

Esercizio 1

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \qquad \text{al variare di } p \in \mathbb{R}$$

Per $p < 1$ abbiamo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$$

Per $p = 1$ abbiamo

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to 0} \log x \Big|_t^1 = \infty$$

Per $p > 1$ abbiamo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \to 0} \frac{1}{1-p} \left[1 - t^{1-p} \right] = \infty$$

$$\int \frac{2x}{4-9x^2}\, dx = \frac{1}{9} \int \frac{18x}{4-9x^2} = -\frac{1}{9} \log |4-9x^2| + c$$

dove l'ultima identità è ottenuta passando alla variabile $y = 4 - 9x^2$

$$\int e^x \cos(e^x)\, dx = \sin(e^x) + c$$

passando alla variabile $y = e^x$.

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 2}$$

ed in particolare:

- determinare il suo dominio di definizione;
- verificare se è una funzione pari o dispari e determinare dove assume valori positivi e negativi;
- studiarne gli eventuali asintoti;
- determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e decrescente;
- determinare i suoi punti di massimo e minimo (assoluti e relativi);
- determinare gli intervalli dove la funzione è concava e convessa ed i suoi punti di flesso;
- farne un disegno qualitativo.

Vedi esercizio 2.79 a pg 106 tomo III

Scritto di Matematica del 20 - 9 - 2017

E. Scoppola

Esercizio 4

La funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua. Infatti usando la disuguaglianza

$$\big|xy\big| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

otteniamo

$$\Big|\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

e dunque per ogni ϵ esite $\delta = \epsilon$ tale che

$$\Big|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big| \leq \epsilon$$

per ogni (x,y) tale che $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Esercizio 5

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = \frac{y}{x} + x^3, \qquad \text{con} \qquad y(1) = 0$$

E' un'equazione lineare del prim' ordine con $a(x) = \frac{1}{x}$, con primitiva $A(x) = \log x$, e $b(x) = x^3$ e dunque applicando la formula per le soluzioni delle equazioni lineari otteniamo

$$y(x) = x\Big(C + \int \frac{1}{x}x^3\,dx\Big) = x(C + \frac{x^3}{3}).$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $0 = C + \frac{1}{3}$ e dunque $C = -\frac{1}{3}$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x}{3}(-1 + x^3).$$

Scritto di Elementi di Analisi del 20 - 9 - 2017
E. Scoppola

Esercizio 4

Calcolare la somma delle seguenti serie:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10\,.\,2^n}{e^n}, \qquad S_2 = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

S_1 è una serie geometrica di ragione $\frac{2}{e} < 1$ e dunque

$$S_1 = 10\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n = 10\frac{1}{1-2/e}$$

Per la serie S_2, ricordando che (vd pg. 346 del libro Marcellini Sbordone)

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

abbiamo

$$S_2 = \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n!} = e - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = e - 2,666...$$

Esercizio 5

Utilizzando il metodo di separazione delle variabili determinare le soluzioni dell'equazione alle derivate parziali:

$$2\partial_{xx}f(x,y) + \partial_{yy}f(x,y) = 0$$

Cerchiamo la soluzione per separazione di variabili cioè nella forma $f(x,y) = g(x)h(y)$. Otteniamo l'equazione

$$2g''(x)h(y) + h''(y)g(x) = 0$$

e dunque

$$2\frac{g''(x)}{g(x)} = K = -\frac{h''(y)}{h(y)}$$

per qualche costante K. Al variare del valore di K otteniamo diversi tipi di soluzione:

$K < 0$:

$$f(x,y) = \Big(A\cos(\sqrt{-K/2}x) + B\sin(\sqrt{-K/2}x)\Big)\Big(C_1e^{\sqrt{-K}y} + C_2e^{-\sqrt{-K}y}\Big)$$

$K = 0$:

$$f(x,y) = \Big(C_1 + C_2x\Big)\Big(D_1 + D_2y\Big) = A + Bx + Cy + Dxy$$

$K > 0$:

$$f(x,y) = \Big(C_1e^{\sqrt{K/2x}} + C_1e^{-\sqrt{K/2x}}\Big)\Big(A\cos(\sqrt{K}y) + B\sin(\sqrt{K}y)\Big).$$