Scritto di Istituzioni di Matematica del 21 - 2 - 2018
E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Discutere il sistema di equazioni

$$\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 2 \\ x-z & = & 0 \\ 3x+y & = & 1 \end{array}$$

La matrice dei coefficienti è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante nullo e rango 2. La matrice completa è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, dunque, per il teorema di Rocheé-Capelli, non esistono soluzioni.

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3n^2}{n^2\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+3}{\log n} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x} = -1$$

Si tratta di una forma indeterminata che possiamo risolvere per esempio col teorema di de l'Hopital.

Esercizio 3

Discutere la continuità della seguente funzione al variare del parametro a:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ 1 + \frac{a}{\log x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Se il parametro $a = 0$ abbiamo che la funzione è continua. Per $a \neq 0$ la funzione ha una discontinuità di seconda specie in $x = 1$ poiche'

$$\lim_{x \to 1^-} 1 + \frac{a}{\log x}$$

diverge.

Esercizio 4

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{e^{3x^2}}{x} \qquad g(x) = \cos(2x^2 + 3)$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x^2} 6x^2 - e^{3x^2}}{x^2} = e^{3x^2} \frac{6x^2 - 1}{x^2}$$

$$g'(x) = -4x \sin(2x^2 + 3)$$

Parte II

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 e^y dy = \frac{1}{2}\Big(e^4 - e\Big)$$

avendo considerato il cambiamento di variabile $x \to y = x^2$.

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1} \, dx$$

È un integrale improprio che, col cambiamento di variabile $y = x - 1$ riscriviamo come

$$\lim_{h \to 0} \int_h^1 \frac{1}{y} = \lim_{h \to 0} \log y \Big|_h^1 = +\infty$$

dunque l'integrale diverge.

$$\int \frac{x+3}{x^2 - 3x} \, dx = \int \Big(\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x}\Big) dx$$

con A e B tali che

$$x + 3 = Ax + B(x - 3)$$

e dunque $A = 2$ e $B = -1$. Da cui

$$\int \frac{x+3}{x^2 - 3x} \, dx = \int \frac{2}{x-3} \, dx - \int \frac{1}{x} \, dx = 2 \log |x - 3| - \log |x| + C$$

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

vedi Marcellini Sbordone - Esercizi tomo 3 esercizio 2.35 a pg 63

Scritto di Matematica del 21 - 2 - 2018

Esercizio 6

Calcolare la somma della serie:

$$S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{3^{2n}} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1 - \frac{2}{9}} - 1 - \frac{2}{9}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{9}{7} - \frac{11}{9}\right] = \frac{1}{63}$$

Esercizio 7

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$y' = x(y - y^3)$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 3$ (vd. Marcellini-Sbordone pg.360) con soluzioni

$$y(x) = \pm(1 + ce^{-x^2})^{-1/2}$$

Elementi di Analisi del 21 - 2 - 2018

Esercizio 8

Sviluppare in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione periodica

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ 3x & \text{per } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Per una funzione periodica in $[-\pi, \pi]$ abbiamo

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

con

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

In questo caso

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad a_k = \frac{4}{\pi k^2} \mathbb{1}_{\{k \ dispari\}}, \qquad b_k = (-1)^{k-1} \frac{4}{k}$$