Scritto di Istituzioni di Matematica del 21 - 6 - 2017

E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Si vede immediatamente che la terza riga è una combinazione lineare delle prime due, dunque tutte le sottomatrici 3x3 di A hanno determinante nullo. E' immediato verificare che esistono sottomatrici 2x2 con determinante non nullo e dunque il rango è 2.

Esercizio 2

Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle funzioni

$$f(x) = \sqrt{1+x^5} - \sqrt{1-x^5}, \qquad g(x) = \log{(1+x)^x}$$

Confronta esercizio 8.68 del Marcellini-Sbordone Tomo II

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^3+1)}{x}$$

Confronta esercizio 8.30 del Marcellini-Sbordone Tomo II

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x - x}{\cos x + \sqrt{1+x^2}}$$

Confronta esercizio 8.57 del Marcellini-Sbordone Tomo II

Scritto di Istituzioni di Matematica del 21 - 6 - 2017
E. Scoppola

Parte II

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Confronta esercizio 5.54 del Marcellini-Sbordone Tomo IV

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx \qquad \text{al variare di } p \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$$

Confronta esercizio pg 66 del Marcellini-Sbordone Tomo IV

Esercizio 2

Studiare la funzione:

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$$

Confronta esercizio 2.66 del Marcellini-Sbordone Tomo III

Scritto di Matematica del 21 - 6 - 2017
E. Scoppola

Esercizio 1

Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle funzioni

$$f(x) = \sqrt{1+x^5} - \sqrt{1-x^5}, \qquad g(x) = \log{(1+x)^x}$$

Confronta esercizio 8.68 del Marcellini-Sbordone Tomo II

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x^3+1)}{x}$$

Confronta esercizio 8.30 del Marcellini-Sbordone Tomo II

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x - x}{\cos x + \sqrt{1+x^2}}$$

Confronta esercizio 8.57 del Marcellini-Sbordone Tomo II

Esercizio 3

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Confronta esercizio 5.54 del Marcellini-Sbordone Tomo IV

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx \qquad \text{al variare di } p \in \mathbb{R}$$

Confronta pg. 325 del Marcellini-Sbordone "Elementi di Calcolo"

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$$

Confronta esercizio pg 66 del Marcellini-Sbordone Tomo IV

Esercizio 4

Studiare la funzione:

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$$

Confronta esercizio 2.66 del Marcellini-Sbordone Tomo III

Esercizio 5

Determinare il valore della serie numerica:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (a-2)^n$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Si tratta di una serie geometrica di ragione $a-2$ che converge a $\frac{1}{3-a}$ se $|a-2| < 1$ cioè se $a \in (1,3)$, diverge se $a \geq 3$ ed è indeterminata se $a \leq 1$.

Esercizio 6

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = -y(\frac{2}{x} + 3x^2 y) \qquad \text{con} \qquad y(1) = 1$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$, che possiamo risolvere con la sostituzione $z = y^{-1}$. Per la variabile z l'equazione diventa

$$z' = \frac{2}{x}z + 3x^2$$

con soluzione

$$z(x) = x^2\Big(C + 3x\Big)$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $C = -2$ e dunque la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3x^3 - 2x^2}.$$

Esercizio 7

Determinare la soluzione del problema:

$$y" - 2y' + y = 2\sin x + \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Per trovare la soluzione dell'equazione omogenea risolviamo il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

che ha discriminante nullo e dunque due soluzioni coincidenti $\lambda = 1$. Otteniamo dunque la soluzione $y_{omog} = e^x\big(C_1 + C_2x\big)$.

Cerchiamo la soluzione particolare nella forma $y_{part} = A\cos x + B\sin x$ ottenendo

$$y'_{part} = -A\sin x + B\cos x, \qquad y"_{part} = -A\cos x - B\sin x$$

e dunque la seguente equazione per A e B:

$$-A\cos x - B\sin x - 2(-A\sin x + B\cos x) + A\cos x + B\sin x = 2\sin x + \cos x$$

da cui otteniamo

$$-A - 2B + A = 1, \qquad -B + 2A + B = 2$$

e dunque $B = -1/2, A = 1$ Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = e^x\big(C_1 + C_2x\big) + \cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

ed utilizzando i dati iniziali otteniamo $C_1 = 0, C_2 = 1/2$ da cui la soluzione

$$y(x) = \frac{e^x x}{2} + \cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

Scritto di Elementi di Analisi del 21 - 6 - 2017
E. Scoppola

Esercizio 1

Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Si vede immediatamente che la terza riga è una combinazione lineare delle prime due, dunque tutte le sottomatrici 3x3 di A hanno determinante nullo. E' immediato verificare che esistono sottomatrici 2x2 con determinante non nullo e dunque il rango è 2.

Esercizio 2

Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ delle funzioni

$$f(x) = \sqrt{1+x^5} - \sqrt{1-x^5}, \qquad g(x) = \log{(1+x)^x}$$

Confronta esercizio 8.68 del Marcellini-Sbordone Tomo II

Esercizio 3

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^3+1)}{x}$$

Confronta esercizio 8.30 del Marcellini-Sbordone Tomo II

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x - x}{\cos x + \sqrt{1+x^2}}$$

Confronta esercizio 8.57 del Marcellini-Sbordone Tomo II

Esercizio 4

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Confronta esercizio 5.54 del Marcellini-Sbordone Tomo IV

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^p}\, dx \qquad \text{al variare di } p \in \mathbb{R}$$

Confronta pg. 325 del Marcellini-Sbordone "Elementi di Calcolo"

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$$

Confronta esercizio pg 66 del Marcellini-Sbordone Tomo IV

Esercizio 5

Studiare la funzione:

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$$

Confronta esercizio 2.66 del Marcellini-Sbordone Tomo III

Esercizio 6

Determinare il valore della serie numerica:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (a-2)^n$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = -y(\frac{2}{x} + 3x^2 y) \qquad \text{con} \qquad y(1) = 1$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$, che possiamo risolvere con la sostituzione $z = y^{-1}$. Per la variabile z l'equazione diventa

$$z' = \frac{2}{x} z + 3x^2$$

con soluzione

$$z(x) = x^2 \Big(C + 3x \Big)$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $C = -2$ e dunque la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{3x^3 - 2x^2}.$$

Esercizio 8

Determinare la soluzione del problema:

$$y" - 2y' + y = 2\sin x + \cos x \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Per trovare la soluzione dell'equazione omogenea risolviamo il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

che ha discriminante nullo e dunque due soluzioni coincidenti $\lambda = 1$. Otteniamo dunque la soluzione $y_{omog} = e^x \big(C_1 + C_2 x \big)$.

Cerchiamo la soluzione particolare nella forma $y_{part} = A\cos x + B \sin x$ ottenendo

$$y'_{part} = -A\sin x + B\cos x, \qquad y"_{part} = -A\cos x - B\sin x$$

e dunque la seguente equazione per A e B:

$$-A\cos x - B\sin x - 2(-A\sin x + B\cos x) + A\cos x + B\sin x = 2\sin x + \cos x$$

da cui otteniamo

$$-A - 2B + A = 1, \qquad -B + 2A + B = 2$$

e dunque $B = -1/2, A = 1$ Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = e^x \big(C_1 + C_2 x \big) + \cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

ed utilizzando i dati iniziali otteniamo $C_1 = 0, C_2 = 1/2$ da cui la soluzione

$$y(x) = \frac{e^x x}{2} + \cos x - \frac{1}{2}\sin x$$