II Esonero di Istituzioni di Matematica del 22 - 1 - 2018

E. Scoppola

Testo 1

Esercizio 1

Studiare la funzione:

$$f(x) = x(3 - \log^2 x)$$

Vedi libro di esercizi Marcellini Sbordone, Tomo 3, esercizio 2.68 (a) pg 95

Esercizio 2

Calcolare i seguenti integrali:

1)

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+3}dx$$

La funzione integranda è una funzione razionale, otteniamo:

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$$

con $A = 2$, $B = -1$ e dunque

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+3}dx = 2\int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-1} = 2\log|x-3| - \log|x-1| + C$$

2) Integrando per parti due volte otteniamo:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

3)

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{2/3}}$$

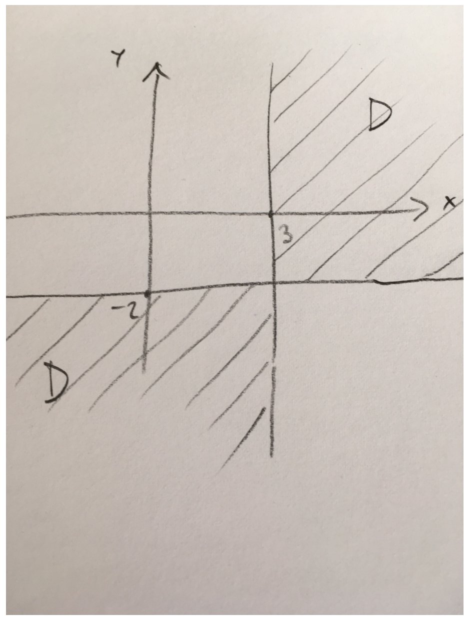
Si tratta di un integrale improprio perché la funzione integranda diverge ad un estremo. Passando alla variabile $y = 1 - x$ abbiamo

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{2/3}} = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{dy}{y^{2/3}} = \lim_{h\to 0^+} 3y^{1/3}\Big|_h^1 = 3$$

Esercizio 3

La funzione
$$f(x,y) = \log\big((x-3)(y+2)\big)$$

i) Ha dominio di definizione $D = \{(x,y) : (x-3)(y+2) > 0\}$ come nella regione tratteggiata



ii) Il suo gradiente è dato dal vettore
$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{1}{(x-3)}, \frac{1}{(y+2)}\Big)$$

iii) Per calcolare la sua derivata direzionale nella direzione del vettore $\mathbf{v} = (-1,1)$ calcolo prima il versore in questa direzione:
$$\hat{\mathbf{v}} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$
da cui
$$f_{\hat{\mathbf{v}}}(x,y) = \Big(\nabla f(x,y), \hat{\mathbf{v}}\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2(x-3)} + \frac{\sqrt{2}}{2(y+2)}$$

Testo 2

Esercizio 1

Studiare la funzione:
$$f(x) = \log x - \log^2 x$$
Vedi libro di esercizi Marcellini Sbordone, Tomo 3, esercizio 2.71 (b) pg 98

Esercizio 2

Calcolare i seguenti integrali:

1)
$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx$$
La funzione integranda è una funzione razionale, otteniamo:
$$\frac{x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$
con $A = 1$ e $B = 2$ e dunque
$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \log|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

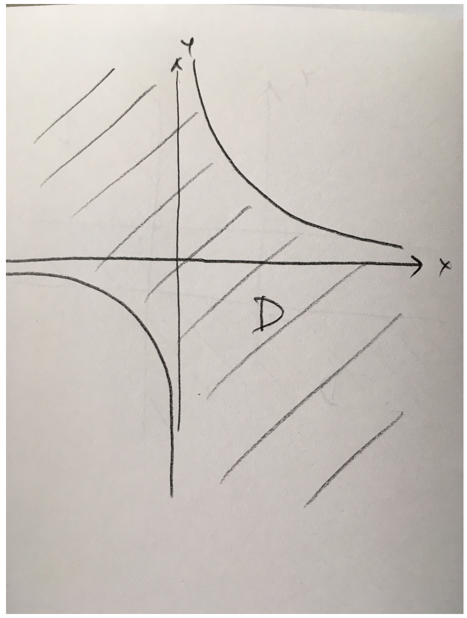
2) Integrando per parti otteniamo:
$$\int xe^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C$$

3)
$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{3/2}}$$
Si tratta di un integrale improprio perché la funzione integranda diverge ad un estremo. Passando alla variabile $y = 1 - x$ abbiamo:
$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{3/2}} = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{dy}{y^{3/2}} = \lim_{h\to 0^+} -2y^{-1/2}\Big|_h^1 = \infty$$
Dunque l'integrale diverge.

Esercizio 3

La funzione
$$f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$$

i) Ha dominio di definizione $D = \{(x, y) :\ xy \leq 1\}$ cioè
$$y \leq \frac{1}{x} \quad \text{per} \quad x > 0, \qquad y \geq \frac{1}{x} \quad \text{per} \quad x < 0$$
come nella regione tratteggiata



ii) Il suo gradiente è dato dal vettore

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{-y}{2\sqrt{1-xy}}, \frac{-x}{2\sqrt{1-xy}}\Big)$$

iii) Per calcolare la sua derivata direzionale nella direzione del vettore $\mathbf{v} = (1,-1)$ calcolo prima il versore in questa direzione:

$$\hat{\mathbf{v}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

da cui

$$f_{\hat{\mathbf{v}}}(x,y) = \Big(\nabla f(x,y), \hat{\mathbf{v}}\Big) = \frac{x-y}{2\sqrt{2(1-xy)}}$$