Scritto di Istituzioni di Matematica del 23 - 2 - 2017
E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Il sistema:

$$\begin{array}{rcr} x+y+3z & = & 3 \\ 2x+y+2z & = & 1 \\ x-z & = & -2 \end{array}$$

ha matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante nullo. Non possiamo applicare il teorema di Cramer ma applichiamo il teorema di Rouché-Capelli e notando che la terza equazione del sistema è la seconda meno la prima, abbiamo subito che il rango della matrice completa è anch'esso uguale a 2. Otteniamo dunque infinite soluzioni della forma

$$x = t-2, \quad y = -4t+5 \quad z = t$$

Esercizio 2

Dal teorema dell'Hopital o dall'espansione di e^{2x} intorno a $x=0$ otteniamo immediatamente

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{2x}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log 2x}{\log 3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log 2 + \log x}{\log 3 + \log x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} + \log x\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\sin x} + x\log x\right) = +\infty$$

Parte II

Esercizio 1

Col cambiamento di variabile $y = \tan x$, avendo $dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$ si ottiene immediatamente

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

$$\int \frac{1 - x^4 + x}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{1 - x^4}{x^2 + 1}\, dx + \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx =$$

$$= \int 1 - x^2\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + c$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int x \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \int \frac{x^2}{2} \frac{-\frac{2}{x^2}}{(1 + \frac{2}{x})}\, dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \int \left(1 - \frac{2}{x + 2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) + x - 2 \log|x + 2| + c$$

Col cambiamento di variabile $y = \log x$, avendo $dy = \frac{dx}{x}$

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x} dx = \int_0^{\log 2} y\, dy = \frac{\log^2 2}{2}$$

Esercizio 2

La funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

è definita ovunque ed è una funzione pari e sempre positiva. Non ha asintoti verticali o orizzontali ma ha asintoti obliqui di equazioni $y = x$ per $x \to +\infty$ e $y = -x$ per $x \to -\infty$ (vedi Marcellini Sbordone Tomo 3 es. 2.32).

Per studiare l'andamento della funzione calcoliamo

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

che è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$ e nulla in $x = 0$. Dunque la funzione è crescente sul semiasse positivo e decrescente su quello negativo con un punto di minimo in $x = 0$ che è un minimo assoluto. Calcolando

$$f"(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}} > 0$$

dunque la funzione è sempre convessa.

Per un disegno qualitativo si veda Marcellini Sbordone Tomo 3 pg. 56.