I Esonero di Istituzioni di Matematica del 24 - 11 - 2017

E. Scoppola

Testo 1

---

1) Dati i vettori $\mathbf{u} = (1,1)$ e $\mathbf{v} = (-1,-1)$ nel piano x, y abbiamo

$$2\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1,1), \qquad \mathbf{u}.\mathbf{v} = -2, \qquad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$$

infatti i vettori sono antiparalleli, $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$ e l'angolo tra essi compreso vael π.

2) Dato il sistema di equazioni

$$\begin{array}{ccc} x + y + \lambda z & = & 0 \\ (1-\lambda)x + z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \end{array}$$

abbiamo la matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$detA = -(1-\lambda)^2$$

Per $\lambda \neq 1$ abbiamo $detA \neq 0$ e dunque applicando il teorema di Cramer possiamo concludere che esiste una unica soluzione che é quella banale $x = y = z = 0$.

Nel caso invece $\lambda = 1$ per il teorema di Rouché-Capelli, poichè il rango della matrice A é uguale al rango della matrice completa, abbiamo infinite soluzioni con $x = -y$ e $z = 0$.

3) col cambiamento di variabile $y = \pi(x-2)$ abbiamo

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cos(\pi x) - 1}{(x-2)^2} = \lim_{y \to 0} \pi^2 \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{\pi^2}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + 3}{x^3(2x^2 - 4)} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt{3-x}}{2-\sqrt{2+x}} = \lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt{3-x}}{2-\sqrt{2+x}} \times \frac{1+\sqrt{3-x}}{1+\sqrt{3-x}} \times \frac{2+\sqrt{2+x}}{2+\sqrt{2+x}} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2+x}{2-x} \times \frac{2+\sqrt{2+x}}{1+\sqrt{3-x}} = -2$$

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos 2x\Big)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}$$

infatti applicando il teorema dell'Hopital abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\log(\cos 2x) = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2x}\times\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} = -6$$

4) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x^3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

è continua per $a = 2$.

5) Date le funzioni

$$f_1(x) = \big(1 + \cos(2x^2+3)\big)^2, \qquad f_2(x) = \frac{x^2+2}{x^3+3x}$$

$$f_3(x) = x\log(1+x^2), \qquad f_4(x) = \sqrt{e^{x^2}+2}$$

abbiamo

$$f_1'(x) = -8x\big(1+\cos(2x^2+3)\big)\sin(2x^2+3)$$

$$f_2'(x) = \frac{2x^2(x^2+3)-(x^2+2)(3x^2+3)}{(x^3+3x)^2} = -\frac{x^4+3x^2+6}{(x^3+3x)^2}$$

$$f_3'(x) = \log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$$

$$f_4'(x) = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+2}}$$

Testo 2

---

1) Dati i vettori $\mathbf{u} = (0,1)$ e $\mathbf{v} = (2,0)$ nel piano x, y abbiamo

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-2,1), \qquad \mathbf{u}.\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = -2\hat{k}$$

infatti i vettori sono ortogonali e l'angolo tra essi compreso vale $-\frac{\pi}{2}$.

2) Dato il sistema di equazioni

$$\begin{array}{rcl} x + y + \lambda z & = & 1 \\ \lambda x + 2z & = & 0 \\ x + y + 2z & = & 1 \end{array}$$

abbiamo matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detA = \lambda(\lambda - 2)$$

Per $\lambda \neq 0, 2$ abbiamo $detA \neq 0$ e dunque applicando il teorema di Cramer possiamo concludere che esiste una unica soluzione che é $x = z = 0, y = 1$.

Nel caso $\lambda = 0$ per il teorema di Rouché-Capelli, poichè il rango della matrice A é uguale al rango della matrice completa, abbiamo infinite soluzioni con $x = 1 - y$ e $z = 0$.

Nel caso $\lambda = 2$ sempre per il teorema di Rouché-Capelli, poichè il rango della matrice A é uguale al rango della matrice completa, abbiamo infinite soluzioni con $x = y - 1$ e $z = -x$.

3) Col cambio di variabile $y = 2\pi(x - 1)$ abbiamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(2\pi x)}{(x-1)} = \lim_{y\to 0} 2\pi \frac{\sin y}{y} = 2\pi$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^2(x^2 + 4x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{x-3}} = \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{4-x} \times \frac{1 + \sqrt{x-3}}{3 + \sqrt{5+x}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{1/2} - 1}{(x+1)^{1/3} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{3(x+1)^{2/3}}} = \frac{3}{2}$$

4) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + \log(x-1) & \text{se } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

è continua per $a = 0$.

5) Date le funzioni

$$f_1(x) = \tan^2(2x+1), \qquad f_2(x) = \frac{x-1}{x^3 - x}$$

$$f_3(x) = \log(\cos^2(x+1)), \qquad f_4(x) = x^4\sqrt{x+1}$$

abbiamo

$$f_1'(x) = 4\frac{\tan(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}$$

$$f_2'(x) = -\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^3+3x^2-1}{(x^3-x)^2}$$

$$f_3'(x) = -\frac{2\sin(x+1)}{\cos(x+1)}$$

$$f_4'(x) = 4x^3\sqrt{x+1} + \frac{x^4}{2\sqrt{x+1}}$$