Soluzione della simulazione II Esonero di Istituzioni di Matematica del 25 - 1 - 2017

E. Scoppola

Esercizio 1

Studiare la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}.$$

- Il dominio di definizione è

$$\mathbf{D} = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$

infatti deve essere $x^2 + x = x(x+1) \geq 0$.

- La funzione non è né pari né dispari e assume sempre valori positivi.

- La funzione si annulla nei punti -1 e 0 dunque non ci sono asintoti verticali. Per studiarne gli eventuali asintoti orizzontali calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

dunque non ci sono neanche asintoti orizzontali. Ci sono invece asintoti obliqui infatti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -1$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}$$

chiamando $y = -x$ abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} + x = \lim_{y\to\infty} \left(\sqrt{y^2-y} - y\right) \frac{\sqrt{y^2-y}+y}{\sqrt{y^2-y}+y} = \lim_{y\to\infty} \frac{(y^2-y)-y^2}{\sqrt{y^2-y}+y} = -\frac{1}{2}$$

dunque esistono due asintoti obliqui, per $x \to \infty$ la retta $y = x + 1/2$ e per $x \to -\infty$ la retta $y = -x - 1/2$.

- Per determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e decrescente e i suoi punti di massimo e minimo studiamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{1 + 2x}{2\sqrt{x^2+x}}$$

che non esiste nei punti $x = -1$ e $x = 0$ dove diverge. Abbiamo $f'(x) > 0$ in $(0, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -1)$, dunque funzione decrescente in $(-\infty, -1)$ e crescente in $(0, +\infty)$. Il minimo della funzione è assunto nei punti $x = -1$ e $x = 0$ e non esistono massimi.

- Per determinare gli intervalli dove la funzione è concava e convessa ed i suoi punti di flesso valutiamo la sua derivata seconda:

$$f"(x) = -frac14(x^2+x)^{3/2}$$

che è sempre negativa dunque la funzione è sempre concava.

Esercizio 2

Abbiamo $x+3x^2 = x(1+3x)$ dunque scriviamo la funzione integranda come

$$\frac{x+3}{x+3x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+3x}$$

con A e B tali che

$$x+3 = A(1+3x) + Bx$$

cioè $A = 3$ e $B = -8$. Quindi otteniamo:

$$\int \frac{x+3}{x+3x^2} dx = 3\int \frac{1}{x} dx - 8\int \frac{1}{1+3x} dx = 3\log|x| - \frac{8}{3}\log|1+3x| + C$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int_{-1}^{2} (x+1)e^x\, dx = xe^x\Big|_{-1}^{2} = 2e^2 + e^{-1}$$

Facendo il cambiamento di variabile da x a $y = \sin x$ otteniamo

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx = \int \frac{dy}{1-y} = -\log|1-y| + C = -\log|1-\sin x| + C$$

Con il cambio di variabile $y = 2x$ calcoliamo l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \arctan 2b = \frac{\pi}{4}.$$