Scritto di Istituzioni di Matematica del 25 - 6 - 2019
E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Risolvere il sistema di due equazioni in tre incognite

$$\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ 2x-y-z & = & 3 \end{array}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno entrambe rango 2, per il teorema di Rouchè-Capelli esistono infinite soluzioni. Utilizzando la variabile z come parametro arbitrario otteniamo

$$x = 2(z+1), \quad y = 3z+1, \quad z = z.$$

Per maggiori dettagli vedi esercizio 5.39 del Marcellini-Sbordone Vol. 1 Tomo 1 pg 141

Esercizio 2

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{x}{x+1}} = e$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x+x^2)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x + \log(1+x)}{\log x} = 1 + \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x)}{\log x} = 1$$

Parte II

Esercizio 1

Integrando per sostituzione con $t = \sqrt{x}$ si ottiene

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \sin t\,dt = -2\cos\sqrt{x} + c$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int \frac{\log(1+x)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\log(1+x) + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}dx =$$

$$-\frac{1}{x}\log(1+x) + \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\Big)dx = -\frac{1}{x}\log(1+x) + \log\frac{|x|}{1+x} + c$$

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

ed in particolare:

- determinare il suo dominio di definizione;
- verificare se è una funzione pari o dispari e determinare dove assume valori positivi e negativi;
- studiarne gli eventuali asintoti;
- determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e decrescente;
- determinare i suoi punti di massimo e minimo (assoluti e relativi);
- determinare gli intervalli dove la funzione è concava e convessa ed i suoi punti di flesso;
- farne un disegno qualitativo.

Vedi libro di esercizi Marcellini Sbordone, Tomo 3, esercizio 2.40 (a) pg 69

Scritto di Matematica ed Elementi di Analisi del 25 - 6 - 2019

Esercizio 5

Determinare il carattere della serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$$

al variare di $a \geq 0$.

La serie è a termini positivi e diverge per $a > 1$ e converge per $a \leq 1$ usando per esempio il criterio del rapporto.

Esercizio 6

Determinare la soluzione del problema:

$$y" + 2y' + y = e^{3x} \qquad \text{con} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea.

La soluzione dell'omogenea associata si determina dal polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

ottenendo

$$y_{om}(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

La soluzione particolare la cerchiamo nella forma $y_{part}(x) = Ce^{3x}$ ottenendo

$$y_{part}(x) = \frac{1}{16}e^{3x}.$$

Abbiamo dunque la soluzione generale

$$y(x) = y_{om}(x) + y_{part}(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \frac{1}{16}e^{3x}$$

e dai dati iniziali otteniamo la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{16}\Big(- e^{-x} + 12xe^{-x} + e^{3x}\Big).$$