Soluzione del II Esonero di Istituzioni di Matematica del 26 - 1 - 2017
E. Scoppola

Testo 1

Esercizio 1

Studiare la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}.$$

- Il dominio di definizione è

$$\mathbf{D} = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}\backslash(-1, 2)$$

infatti deve essere $x^2 - x - 2 \geq 0$.

- La funzione non è né pari né dispari e assume sempre valori positivi.

- La funzione si annulla nei punti -1 e 2 dunque non ci sono asintoti verticali. Per studiarne gli eventuali asintoti orizzontali calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

dunque non ci sono neanche asintoti orizzontali. Ci sono invece asintoti obliqui infatti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$$

e definendo $y = -x$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{\sqrt{y^2 + y - 2}}{-y} = -\lim_{y\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{y} - \frac{2}{y^2}} = -1$$

e inoltre

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} - x = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - x - 2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 - x - 2) - x^2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = -\frac{1}{2}$$

chiamando ancora $y = -x$ abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - x - 2} + x = \lim_{y\to\infty} \left(\sqrt{y^2 + y - 2} - y\right) \frac{\sqrt{y^2 + y - 2} + y}{\sqrt{y^2 + y - 2} + y} =$$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{(y^2 + y - 2) - y^2}{\sqrt{y^2 + y - 2} + y} = \frac{1}{2}$$

dunque esistono due asintoti obliqui, per $x \to \infty$ la retta $y = x - 1/2$ e per $x \to -\infty$ la retta $y = -x + 1/2$.

- Per determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e decrescente e i suoi punti di massimo e minimo studiamo la derivata:

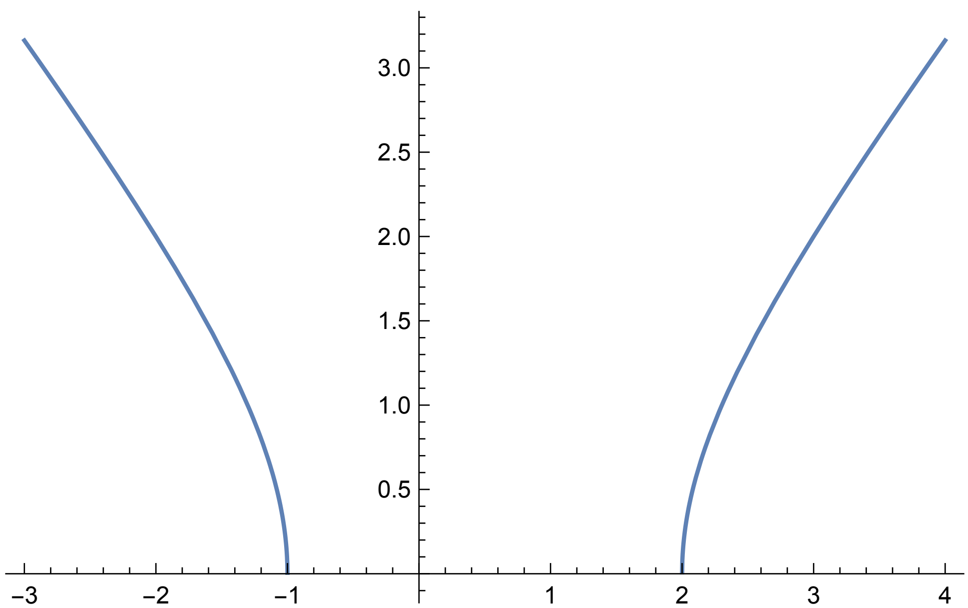
$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

che non esiste nei punti $x = -1$ e $x = 2$ dove diverge. Abbiamo $f'(x) > 0$ in $(2, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -1)$, dunque la funzione è decrescente in $(-\infty, -1)$ e crescente in $(2, +\infty)$. Il minimo della funzione è assunto nei punti $x = -1$ e $x = 2$ e non esistono massimi.

- Per determinare gli intervalli dove la funzione è concava e convessa ed i suoi punti di flesso valutiamo la sua derivata seconda:

$$f"(x) = -\frac{9}{4(x^2-x-2)^{3/2}}$$

che è sempre negativa dunque la funzione è sempre concava.



Esercizio 2

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} = -2\log|x-1| + 3\log|x-2| + C$$

Infatti abbiamo $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ dunque scriviamo la funzione integranda come

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

con A e B tali che

$$x + 1 = A(x-2) + B(x-1)$$

cioè $A = -2$ e $B = 3$. Quindi otteniamo:

$$\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} = -2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x-2} = -2\log|x-1| + 3\log|x-2| + C$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int_0^2 (x+1)e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x}\Big|_0^2 + \int_0^2 e^{-x}dx = -4e^{-2} + 2$$

Facendo il cambiamento di variabile da x a $y = \frac{x^2}{2}$ otteniamo

$$\int xe^{\frac{x^2}{2}}\,dx = \int e^y dy = e^{x^2/2} + C$$

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

Testo 2

Esercizio 1

Studiare la funzione:

$$g(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

- Il dominio di definizione è

  $$\mathbf{D} = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}\backslash(-2, 1)$$

  infatti deve essere $x^2 + x - 2 \geq 0$.

- La funzione non è né pari né dispari e assume sempre valori positivi.

- La funzione si annulla nei punti -2 e 1 dunque non ci sono asintoti verticali. Per studiarne gli eventuali asintoti orizzontali calcoliamo i seguenti limiti:

  $$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

  dunque non ci sono neanche asintoti orizzontali. Ci sono invece asintoti obliqui infatti

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$$

  e definendo $y = -x$

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{\sqrt{y^2-y-2}}{-y} = -\lim_{y\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{y} - \frac{2}{y^2}} = -1$$

  e

  $$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-2} - x = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x-2} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+x-2}+x}{\sqrt{x^2+x-2}+x} =$$

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x-2) - x^2}{\sqrt{x^2+x-2}+x} = +\frac{1}{2}$$

chiamando ancora $y = -x$ abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-2}+x = \lim_{y\to\infty} \left(\sqrt{y^2-y-2}-y\right)\frac{\sqrt{y^2-y-2}+y}{\sqrt{y^2-y-2}+y} =$$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{(y^2-y-2)-y^2}{\sqrt{y^2-y-2}+y} = -\frac{1}{2}$$

dunque esistono due asintoti obliqui, per $x \to \infty$ la retta $y = x + 1/2$ e per $x \to -\infty$ la retta $y = -x - 1/2$.

- Per determinare gli intervalli dove la funzione è crescente e decrescente e i suoi punti di massimo e minimo studiamo la derivata:

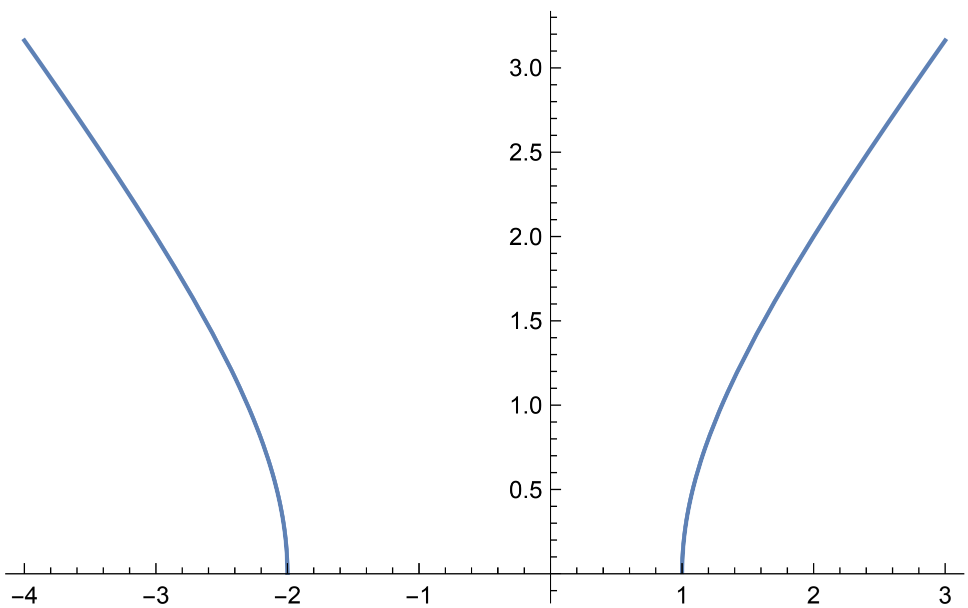
$$g'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$$

che non esiste nei punti $x = -2$ e $x = 1$ dove diverge. Abbiamo $g'(x) > 0$ in $(1, +\infty)$ e $g'(x) < 0$ in $(-\infty, -2)$, dunque funzione decrescente in $(-\infty, -2)$ e crescente in $(1, +\infty)$. Il minimo della funzione è assunto nei punti $x = -2$ e $x = 1$ e non esistono massimi.

- Per determinare gli intervalli dove la funzione è concava e convessa ed i suoi punti di flesso valutiamo la sua derivata seconda:

$$g"(x) = -\frac{9}{4(x^2+x-2)^{3/2}}$$

che è sempre negativa dunque la funzione è sempre concava.



Esercizio 2

$$\int \frac{x}{x^2 - x - 6} = \frac{2}{5} \log|x+2| + \frac{3}{5} \log|x-3| + C$$

Infatti abbiamo $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ dunque scriviamo la funzione integranda come

$$\frac{x}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

con A e B tali che

$$x = A(x-3) + B(x+2)$$

cioè $A = \frac{2}{5}$ e $B = \frac{3}{5}$. Quindi otteniamo:

$$\int \frac{x}{x^2 - x - 6} = \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{2}{5} \log|x+2| + \frac{3}{5} \log|x-3| + C$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int_0^2 (x+2)e^x \, dx = (x+2)e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 3e^2 - 1$$

Facendo il cambiamento di variabile da x a $y = x^2 + 1$ otteniamo

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{y} dy = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$