Scritto di Istituzioni di Matematica del 28 - 1 - 2019

Parte I

Esercizio 1

Risolvere il sistema di tre equazioni in due incognite:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 2x + y &= 3 \\ 4x + 5y &= 7 \end{aligned}$$

Vedi esercizio 5.40 su Marcellini Sbordone tomo 1 pg. 142 **Esercizio 2**

Determinare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$$

Vedi esercizio 8.34 (a) su Marcellini Sbordone tomo 2 pg. 64

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2+1)}{2^x}$$

Vedi esercizio 8.31 (a) su Marcellini Sbordone tomo 2 pg. 63

Parte II

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$$

Vedi esercizio 5.51 su Marcellini Sbordone tomo 4 pg. 109

$$\int \frac{1}{1-e^{2x}} dx$$

Vedi esercizio 4.111 (b) su Marcellini Sbordone tomo 4 pg. 54

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = x\big(3 - \ln^2 x\big)$$

Vedi libro di esercizi Marcellini Sbordone, Tomo 3, esercizio 2.68 (a) pg 95

Scritto di Matematica ed Elementi di Analisi del 28 - 1 - 2019

Esercizio 3

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^p + 1} \qquad \text{al variare di } p \in \mathbb{R}$$

La serie può essere stimata dall' alto e dal basso con serie armoniche generalizzate:
se $p \leq 1$ abbiamo infatti

$$\frac{3}{n^p + 1} \geq \frac{3}{2n^p}$$

che diverge;
se $p > 1$ abbiamo

$$\frac{3}{n^p + 1} \leq \frac{3}{n^p}$$

che converge.

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!}$$

converge e si può calcolare esattamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!} = \exp\{\frac{3}{2}\} - 1$$

Esercizio 4

Sviluppare in serie di Fourier la funzione periodica in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ -x & \text{per } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Si tratta di una funzione pari. Abbiamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(kx)dx = -\frac{2}{k^2\pi}\cos kx\Big|_0^{\pi}$$

dunque a_k nullo per k pari mentre sui dispari

$$a_k = \frac{4}{k^2}$$

e per simmetria

$$b_k = 0 \qquad \text{per ogni } k$$

e dunque otteniamo

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

Esercizio 5

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = xy - xy^3 \qquad \text{con} \qquad y(0) = 2$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 3$. Passando alla variabile $z = y^{1-\alpha} = y^{-2}$ otteniamo l'equazione

$$z' = -2\big(xz - x\big)$$

da cui

$$z = e^{-x^2}\left[C + 2\int e^{x^2}x\,dx\right] = e^{-x^2}\left[C + e^{x^2}\right] = Ce^{-x^2} + 1$$

Utilizzando la condizione iniziale otteniamo $z(0) = 1/4$ da cui $C = -3/4$ e dunque

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-x^2}}}.$$