Scritto di Istituzioni di Matematica del 2 - 2 - 2017

E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Discutere al variare del parametro λ il sistema di equazioni

$$\begin{array}{rcl} x+y+3z & = & 3 \\ x+z & = & 3 \\ 2x+2y+\lambda z & = & 6 \end{array}$$

La matrice dei coefficienti é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$detA = 6 - \lambda$$

Per $\lambda \neq 6$ abbiamo $detA \neq 0$ e dunque applicando il teorema di Cramer possiamo concludere che esiste una unica soluzione che é $x = 3, y = z = 0$.

Nel caso $\lambda = 6$ abbiamo $detA = 0$ e $ran\, A = 2$, consideriamo la matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

abbiamo che anch'essa ha rango 2 e dunque per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo infinite soluzioni della forma $x = t,\ y = -6 + 2t,\ z = 3 - t$.

Esercizio 2

Con il cambio di variabile: $y = \frac{2}{x-1}$, da cui $x = 1 + 2/y$, abbiamo

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}} = \lim_{y\to\infty} \big(1 + \frac{2}{y}\big)^y = e^2.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x^2)}{x^2} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x \cos x}{\sin x} = 4$$

Parte II

Esercizio 1

Passando alla variabile $y = \sin x$ con $dy = \cos x dx$ abbiamo

$$\int \sin^5 x \cos x \, dx = \int y^5 dy = \frac{1}{6} y^6 + C = \frac{1}{6} \sin^6 x + C$$

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+1)\Big|_0^1 + 2 \arctan x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{2}$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} . \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{b} + 1 = 1$$

Esercizio 2

Per lo studio della funzione:

$$f(x) = x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

vedi Esercizi di Matematica, vol. I Tomo 3 di Marcellini-Sbordone es. 2.75 a) pg. 103