Scritto di Istituzioni di Matematica del 2 - 2 - 2018
E. Scoppola

Parte I

Esercizio 1

Utilizzando le proprietà dei determinanti, determinare il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservando che la terza riga è la somma della prima e della seconda si conclude che il rango non può essere 3 e si verifica immediatamente che è uguale a 2.

Esercizio 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3n^2}{n\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{\log n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-1/x)^x}{(1+3/x)^x} = e^{-4}$$

Esercizio 3

Determinare per quali valori del parametro a la seguente funzione è continua:

$$f(x) = \begin{cases} ax + x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ -x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Per la continuità dobbiamo avere

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = a + 1$$

e dunque $-1 = a + 1$ e dunque $a = -2$.

Parte II

Esercizio 1

Definendo $y = x^2 - 1$ abbiamo

$$\int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int_0^3 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \lim_{h \to 0^+} \int_h^3 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \lim_{h \to 0^+} 2\sqrt{y}\Big|_h^3 = 2\sqrt{3}$$

$$\int \frac{x+2}{(x-2)(x+1)} \, dx = \frac{4}{3} \log|x-2| - \frac{1}{3} \log|x+1| + C$$

infatti la funzione integranda è una funzione razionale che può essere scritta come

$$\frac{x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

con $A = 4/3$ e $B = -1/3$.

Integrando due volte per parti otteniamo:

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} \Big(\sin x - \cos x \Big) + C$$

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$$

Vedi esercizio 2.37 (a) pg. 67 del libro Marcellini Sbordone, Esercizi di Matematica vol 1 tomo 3.

Scritto di Matematica del 2 - 2 - 2018

E. Scoppola

Esercizio 5

La prima serie è geometrica di ragione $e/3 < 1$ da cui

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{3^n} = \frac{e}{1 - e/3} = \frac{3e}{3 - e}$$

La seconda serie è armonica e dunque diverge

$$S_2 = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Esercizio 6

Sviluppare in serie di Taylor la funzione

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

vedi testo Marcellini Sbordone pg. 348.

Esercizio 7

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = xy \qquad \text{con} \qquad y(0) = 2.$$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili

$$\frac{dy}{y} = x\ dx$$

da cui integrando otteniamo

$$\log y = \frac{x^2}{2} + C$$

e dunque

$$y = 2e^{x^2/2}.$$