Soluzione dello scritto di Istituzioni di Matematica del 5-12-2016

E. Scoppola

Testo 1

1)
$$\mathbf{u} = (1,0), \quad \mathbf{v} = (2,2), \quad |\mathbf{u}| = 1, \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{2}$$
$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} = (0,-2)$$
$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = 2 = 2\sqrt{2}\cos\alpha$$
$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 2\hat{k}, \quad 2 = 2\sqrt{2}\sin\alpha$$

da cui $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e dunque $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2) La matrice dei coefficienti é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$detA = \lambda(1-\lambda)$$

Per $\lambda \neq 1, 0$ abbiamo $detA \neq 0$ e dunque applicando il teorema di Cramer possiamo concludere che esiste una unica soluzione che é quella banale $x = y = z = 0$.

Nel caso invece $\lambda = 1$ per il teorema di Rouché-Capelli, poichè il rango della matrice A é uguale al rango della matrice completa, abbiamo infinite soluzioni con $x = t = -y$ e $z = 0$.

Anche nel caso $\lambda = 0$ sempre per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo infinite soluzioni $x = -2t, y = z = t$.

3)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(2\pi x) - 1}{(x-1)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos(2\pi y) - 1}{y^2}$$

con $y = x - 1$, e con l'ulteriore cambio di variabile $z = 2\pi y$ otteniamo

$$(2\pi)^2 \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = 2\pi^2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x(2x^2+4)} = \frac{x^3(1 + 2/x + 3/x^3)}{x^3(2 + 4/x^2)} = 1/2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3 - \sqrt{8+x}}{1 - \sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(3 - \sqrt{8+x})}{(1 - \sqrt{2-x})} \frac{(3 + \sqrt{8+x})}{(3 + \sqrt{8+x})} \frac{(1 + \sqrt{2-x})}{(1 + \sqrt{2-x})} =$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+\sqrt{2-x})}{(x-1)(3+\sqrt{8+x})} = -\frac{1}{3}$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/x}\right)^x = e^{-1}$$

4) La funzione é continua se $f(\pi) = a\pi + \sin\pi = a\pi = \lim_{x\to\pi^-} \cos x = -1$ e dunque per $a = -\frac{1}{\pi}$

5)
$$f_1'(x) = -2cos(x^2)\sin(x^2).2x$$

$$f_2'(x) = \frac{6x^2 - 4x - 4}{(x^2 + 2x)^2}$$
$$f_3'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\, e^{x\sqrt{x}}$$

$$f_4'(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 2}}$$

Testo 2

1)
$$\mathbf{u} = (0,1), \quad \mathbf{v} = (-2,2), \quad |\mathbf{u}| = 1, \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{2}$$
$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} = (2,0)$$
$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = 2 = 2\sqrt{2}\cos\alpha$$
$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 2\hat{k}, \quad 2 = 2\sqrt{2}\sin\alpha$$
da cui $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e dunque $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2) La matrice dei coefficienti é:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$detA = \lambda(\lambda - 1)$$
Per $\lambda \neq 1, 0$ abbiamo $detA \neq 0$ e dunque applicando il teorema di Cramer possiamo concludere che esiste una unica soluzione data da
$$x = -\frac{2}{\lambda(\lambda-1)}, \quad y = \frac{2-\lambda}{\lambda(\lambda-1)}, \quad z = \frac{1}{\lambda - 1}.$$

Nel caso invece $\lambda = 1$ per il teorema di Rouché-Capelli, poichè il rango della matrice A é diverso dal rango della matrice completa C, non abbiamo soluzioni.

Anche nel caso $\lambda = 0$ sempre per il teorema di Rouché-Capelli non ci sono soluzioni poichè $ranA = 2 \neq ranC = 3$.

3)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(2\pi x) - 1}{(x-1)} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos(2\pi y) - 1}{y}$$
con $y = x - 1$, e con l'ulteriore cambio di variabile $z = 2\pi y$ otteniamo
$$(2\pi) \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+3}{x(2x^2+4)} = \frac{x^3(1+2/x+3/x^3)}{x^3(2+4/x^2)} = 1/2$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 3} \frac{(2-\sqrt{1+x})}{(1-\sqrt{x-2})} \frac{(2+\sqrt{1+x})}{(2+\sqrt{1+x})} \frac{(1+\sqrt{x-2})}{(1+\sqrt{x-2})} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(1+\sqrt{x-2})}{(3-x)(2+\sqrt{1+x})} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+3/x}{1+1/x}\right)^x = e^2$$

4) La funzione é continua se $f(\pi) = a\pi + \cos\pi = a\pi - 1 = \lim_{x\to\pi^-} \sin x = 0$ e dunque per $a = \frac{1}{\pi}$.

5)

$$f_1'(x) = 4\sin(2x+1)\cos(2x+1)$$

$$f_2'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2-x)^2}$$

$$f_3'(x) = e^{x\tan x}\left(\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}\right)$$

$$f_4'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$