II esonero di ME440
12-1-2022
E. Scoppola

Esercizio 1

a) Sia Y una variabile casuale con distribuzione di Poisson di parametro λ.
   - calcolare la funzione generatrice dei momenti
   - calcolare il primo ed il secondo momento: $\mathbb{E}Y$ e $\mathbb{E}Y^2$.

b) Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale estratto da una distribuzione di Poisson di parametro 2λ, indipendente dalla variabile Y del punto a),
   - determinare la distribuzione di

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$$

   e determinare $\mathbb{E}\bar{X}$ e la varianza $var\bar{X}$.

c) Determinare la distribuzione di $Z = n\bar{X} + Y$ e calcolare $\mathbb{E}Z$ e $\mathbb{E}Z^2$.

d) Determinare la stima puntuale di λ dal campione $X_1, ..., X_n$ con il metodo della massima verosimiglianza e confrontarlo col metodo dei momenti.

Esercizio 2

Si ipotizza che la percentuale di studenti di ingegneria che superano l'esame di Analisi al primo appello sia il 35 per cento. Da un campione di 400 studenti si ottiene una percentuale media di 34.25. Assumendo $\sigma^2 = 25$ e fissando una significatività $\alpha = 0.05$ stabilire se accettare l'ipotesi

$$H_0: \ \mu = 35 \quad \text{contro} \quad H_1: \ \mu \neq 35$$

Esercizio 3

Data l'equazione alle differenze

$$x(n+1) = \alpha x(n)\big(x(n) - 1\big)$$

determinare i punti di equilibrio e la loro stabilità al variare di $\alpha \in [-1, 1]$.

Esercizio 4

Determinare un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti che ha per soluzione

$$x(n) = a2^n + b + cn + n^2$$

con a, b e c costanti.

Esercizio 5

Utilizzando il software Mathematica determinare l'orbita della mappa logistica per i dati iniziali

$$x_i(0) = \frac{i}{10} \qquad \text{per} \qquad i = 1, 2, ..., 10$$

e per i seguenti valori del parametro μ:

$$\mu = 3.1 \qquad \text{e} \qquad \mu = 4$$

NB: il file con la soluzione dell'esercizio 5 deve essere inviato al prof. D'Autilia entro il giorno 13 gennaio 2022.

Soluzioni

Esercizio 1

a) Sia Y una variabile casuale con distribuzione di Poisson di parametro λ.

- la funzione generatrice dei momenti è:

$$\mathbb{E}e^{tY} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} e^{ty} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

- il primo ed il secondo momento sono: $\mathbb{E}Y = \lambda$ e $\mathbb{E}Y^2 = \lambda(\lambda+1)$.

b) Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale estratto da una distribuzione di Poisson di parametro 2λ

- la distribuzione di $\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$ è una Poissoniana di parametro $2n\lambda$ $\mathbb{E}\bar{X} = 2\lambda$ e $var\bar{X} = \frac{2\lambda}{n}$.

c) La distribuzione di $Z = n\bar{X} + Y$ è Poissoniana di parametro $(2n+1)\lambda$ e dunque $\mathbb{E}Z = (2n+1)\lambda$ e $\mathbb{E}Z^2 = (2n+1)\lambda\big((2n+1)\lambda+1\big)$.

d) La stima puntuale di λ dal campione $X_1, ..., X_n$ con il metodo della massima verosimiglianza è data da $\lambda = \frac{\bar{x}}{2}$ infatti la funzione verosimiglianza è data da

$$L(\lambda, x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-2n\lambda}(2\lambda)^{\sum_i x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

da cui

$$\log L(\lambda, x_1, ..., x_n) = -2n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log \lambda + g(x_1, ..., x_n)$$

con $g(x_1, ..., x_n)$ funzione che non dipende da λ. Ponendo $\frac{\partial \log L(\lambda, x_1, ..., x_n)}{\partial \lambda} = 0$ otteniamo $\lambda = \frac{\bar{x}}{2}$ che coincide con la stima ottenuta col metodo dei momenti.

Esercizio 2

Si deve stabilire se accettare l'ipotesi

$$H_0 : \ \mu = 35 \quad \text{contro} \quad H_1 : \ \mu \neq 35$$

con $\alpha = 0,05$.

Sia $\mu_0 = 35$ e considero la variabile casuale $X_{st} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{-0.75}{5/20} = -3$. Poiché $z_{\alpha/2} = 1,96$ abbiamo $|X_{st}| > z_{\alpha/2}$ e dunque si rifiuta l'ipotesi H_0.

Esercizio 3

Data l'equazione alle differenze

$$x(n+1) = \alpha x(n)\big(x(n) - 1\big)$$

assumiamo $\alpha \neq 0$, altrimenti l'equazione è banale. I punti di equilibrio sono soluzione dell'equazione di punto fisso

$$x = \alpha x(x - 1)$$

da studiare al variare di $\alpha \in [-1, 0) \cup (0, 1]$. Otteniamo i punti di equilibrio $x_0 = 0$ e $x_1 = 1 + 1/\alpha$.

Per calcolare la stabilità valutiamo la derivata prima $f'(x) = \alpha(2x - 1)$ e la derivata seconda $f''(x) = 2\alpha$. Per il punto di equilibrio x_0 otteniamo $f'(0) = -\alpha$ dunque asintoticamente stabile se $|\alpha| < 1$. Per $\alpha = 1$ otteniamo ancora x_0 asintoticamente stabile dato che $f'''(0) = 0$ e dunque la derivata Schwarziana è negativa. Per $\alpha = -1$ abbiamo x_0 instabile dato che $f'(0) = 1$ e $f''(0) = -2$.

Per quanto riguarda la stabilità del punto $x_1 = 1 + 1/\alpha$ abbiamo $f'(x_1) = \alpha(2(1 + 1/\alpha) - 1) = \alpha + 2$, dunque x_1 instabile per $\alpha \neq -1$. x_1 è instabile anche per $\alpha = -1$, poiché $f''(x_1) = -2 \neq 0$

Esercizio 4

Per determinare un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti che ha per soluzione

$$x(n) = a2^n + b + cn + n^2$$

con a, b e c costanti osserviamo che le radici del polinomio caratteristico sono 2 ed 1, di cui 2 con molteplicità 1 ed 1 con molteplicità 3, da cui otteniamo il polinomio

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1)^3 = 0 = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2$$

e dunque l'equazione alle differenze

$$x(n+4) - 5x(n+3) + 9x(n+2) - 7x(n+1) + 2x(n) = 0.$$
