Simulazione II esonero di ME440
7-1-2022
E. Scoppola

Esercizio 1

a) Sia Y una variabile casuale con distribuzione binomiale di parametri n e p.
   - calcolare la funzione generatrice dei momenti
   - calcolare il primo ed il secondo momento: $\mathbb{E}Y$ e $\mathbb{E}Y^2$.

b) Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale estratto da una distribuzione di Bernoulli di parametro p
   - determinare la distribuzione di

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$$

   e determinare $\mathbb{E}\bar{X}$ e la varianza $var\bar{X}$.

c) Determinare la distribuzione di $Z = n\bar{X} + Y$ e calcolare $\mathbb{E}Z$ e $\mathbb{E}Z^2$.

d) Determinare la stima puntuale di p dal campione $X_1, ..., X_n$ con il metodo della massima verosimiglianza e confrontarlo col metodo dei momenti.

Esercizio 2

Si sostituisce un macchinario se il tempo medio di produzione di ogni singolo elemento è minore di 10 minuti. Da un campione di 100 elementi si ottiene un tempo medio di produzione di 10.5 minuti. Assumendo $\sigma^2 = 9$ e fissando una significatività $\alpha = 0.05$ stabilire se accettare l'ipotesi

$$H_0 : \ \mu < 10 \quad \text{contro} \quad H_1 : \ \mu \geq 10$$

Esercizio 3

Data l'equazione alle differenze

$$x(n+1) = a\big(x^3(n) + x(n)\big)$$

determinare i punti di equilibrio e la loro stabilità al variare di $a \in \mathbb{R}_+$.

Esercizio 4

Determinare un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti che ha per soluzione

$$x(n) = (1-2n)2^n + 1 + n$$

Esercizio 5

Utilizzando il software Mathematica determinare l'orbita dell'equazione alle differenze dell'esercizio 3 con $a = 1/2$ e $x(0) = 0.9$.

Soluzioni

Esercizio 1

a) Sia Y una variabile casuale con distribuzione binomiale di parametri n e p.

   - la funzione generatrice dei momenti è:

$$\mathbb{E}e^{tY} = \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} e^{ty} = \big(1 - p + pe^t\big)^n$$

   - il primo ed il secondo momento sono: $\mathbb{E}Y = np$ e $\mathbb{E}Y^2 = np\big(1+p(n-1)\big)$.

b) Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale estratto da una distribuzione di Bernoulli di parametro p

   - la distribuzione di $\sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}$ è una binomiale di parametyri n e p e otteniamo $\mathbb{E}\bar{X} = p$ e $var\bar{X} = \frac{p(1-p)}{n}$.

c) La distribuzione di $Z = n\bar{X} + Y$ è binomiale di parametri $2n$ e p e dunque $\mathbb{E}Z = 2np$ e $\mathbb{E}Z^2 = 2np\big(1 + p(2n-1)\big)$.

d) La stima puntuale di p dal campione $X_1, ..., X_n$ con il metodo della massima verosimiglianza è data da $p = \bar{x}$ infatti la funzione verosimiglianza è data da

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_i x_i}(1-p)^{n-\sum_i x_i}$$

da cui

$$\log L(p) = n\bar{x}\log p + n(1-\bar{x})\log(1-p)$$

e annullandone la derivata otteniamo $p = \bar{x}$ che coincide con la stima ottenuta col metodo dei momenti.

Esercizio 2

Si sostituisce un macchinario se il tempo medio di produzione di ogni singolo elemento è minore di 10 minuti. Da un campione di 100 elementi si ottiene un tempo medio di produzione di 10.5 minuti. Assumendo $\sigma^2 = 9$ e fissando una significatività $\alpha = 0.05$ stabilire se accettare l'ipotesi

$$H_0 : \ \mu < 10 \quad \text{contro} \quad H_1 : \ \mu \geq 10$$

Considero la variabile casuale $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ con $\mu_0 = 10$. Otteniamo $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{0.5}{0.3} = 1.66 > 1.645$ e dunque rifiuto l'ipotesi H_0.

Esercizio 3

Data l'equazione alle differenze

$$x(n+1) = a\big(x^3(n) + x(n)\big)$$

i punti di equilibrio sono soluzione dell'equazione di punto fisso

$$x = ax(x^2+1)$$

da cui otteniamo $x_0 = 0$ e $x_{1,2}$ soluzioni dell'equazione $x^2+1 = 1/a$ che ha soluzioni reali diverse da zero solo se $a < 1$ date da $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{a} - 1}$.

Per calcolare la stabilità valutiamo la derivata prima $f'(x) = a(3x^2+1)$, la derivata seconda $f''(x) = 6ax$ e la derivata terza $f'''(x) = 6a$. Per il punto di equilibrio x_0 otteniamo $f'(0) = a$ dunque stabile se $a \in (0,1)$, instabile se $a > 1$. Per $a = 1$ otteniamo ancora x_0 instabile dato che $f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 6a > 0$.

Sempre per $a \in (0,1)$ abbiamo anche i punti di equilibrio $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{a} - 1}$ instabili visto che $f'(x) = a(3x^2+1) = a(3(\frac{1}{a} - 1) + 1) = 3 - 2a > 1$.

Esercizio 4

Determinare un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti che ha per soluzione

$$x(n) = (1-2n)2^n + 1 + n$$

Abbiamo che le radici del polinomio caratteristico sono 2 ed 1 entrambe con molteplicità 2, da cui otteniamo

$$(\lambda-2)^2(\lambda-1)^2 = 0 = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4$$

e dunque l'equazione alle differenze

$$x(n+4) - 6x(n+3) + 13x(n+2) - 12x(n+1) + 4x(n) = 0.$$

Esercizio 5

Utilizzando il software Mathematica determinare l'orbita dell'equazione alle differenze dell'esercizio 3 con $a = 1/2$ e $x(0) = 0.9$.

Utilizzare NestList.