Probabilità e Statistica

DOCENTE: Prof. Elisabetta Scoppola

FOGLIO DI ESERCIZI 2

TA: Matteo Quattropani
matteo.quattropani@uniroma3.it;

16 novembre 2017

PROBABILITÀ CONDIZIONATE ED INDIPENDENZA

Esercizio 3.1. Si scelgono tre carte a caso, senza rimpiazzo, da un mazzo da poker da 52 carte. Calcolare la probabilità condizionatà che

a) la prima carta scelta sia di picche, sapendo che la seconda e la terza lo sono?
b) le tre carte siano di picche, sapendo che almeno due lo sono?

Soluzione. Siano Ω l'insieme delle possibili permutazioni di un mazzo da poker di 52 carte. $\#\Omega = 52!$. Sia $\mathbb{P}$ la misura di probabilità su Ω t.c. $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/\#\Omega$, $\forall \omega \in \Omega$. Siano $E, F, G, H \in 2^\Omega$ gli eventi

$$E = \{\text{“La prima carta è di picche.”}\} \Longrightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{13 \cdot 51!}{52!} = \frac{13}{52}$$

$$F = \{\text{“La seconda e la terza carta sono di picche.”}\} \Longrightarrow \mathbb{P}(F) = \frac{2\binom{13}{2}50!}{52!} = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51}$$

$$G = \{\text{“Sono tutte e 3 di picche.”}\} \Longrightarrow \mathbb{P}(G) = \frac{3!\binom{13}{3} \cdot 49!}{52!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50}$$

$$H = \{\text{“Almeno due carte sono di picche.”}\} \Longrightarrow \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(G) + 3\mathbb{P}(F)$$

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(F)}.$$

$$\mathbb{P}(G|H) = \frac{\mathbb{P}(H|G)\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(H)}.$$

Esercizio 3.2. Si considerano due scatole, una contenente un sasso nero ed un sasso bianco, l'altra contenente due sassi neri ed un sasso bianco. Si sceglie a caso una scatola, e si prende un sasso a caso dalla scatola. Qual è la probabilità che il sasso sia nero? Qual è la probabilità che sia stata scelta la prima scatola, sapendo che il sasso ottenuto è bianco?

Soluzione. Sia $\Omega = \{1, 2\} \times \{B, N\}$ e $\mathbb{P} : 2^\Omega \to [0, 1]$ t.c.

$$\mathbb{P}(\{1, B\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\{1, N\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\{2, B\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(\{2, N\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}.$$

Siano $E, F \in 2^\Omega$ gli eventi

$$E = \{\text{“Scelgo un sasso nero”}\} = \{\{1, N\}, \{2, N\}\} \Longrightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$F = \{\text{“Scelgo la prima scatola”}\} = \{\{1, N\}, \{1, B\}\}. \Longrightarrow \mathbb{P}(F) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(F|E^c) = \frac{\mathbb{P}(E^c|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E^c)},$$

dove

$$\mathbb{P}(E^c|F) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.3. Si dispone di una moneta sbilanciata, che dà testa con probabilità sconosciuta p *a priori* diversa da $1/2$. Tuttavia si vogliono generare gli esiti dei lanci di una moneta non truccata e si consideri a tal scopo la procedura che segue.

1. Si lancia la moneta
2. Si rilancia la moneta
3. Se entrambi i lanci danno testa o entrambi croce, si torna al punto 1.
4. Il risultato dell'ultimo lancio è il risultato dell'esperimento.

a) Provare che i due risultati possibili sono equiprobabili.
b) Funziona lo stesso se ci fermiamo alla prima successione di due lanci con esiti diversi?

Soluzione.

(1) Scrivendo esplicitamente le probabilità degli eventi che risultano in una testa abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{risultato} = T) =& \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T) + \dots \\ =& \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T)[\mathbb{P}(C)^2 + \mathbb{P}(T)^2 + \mathbb{P}(C)^4 + \mathbb{P}(T)^4 + \mathbb{P}(C)^2\mathbb{P}(T)^2 + \dots]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{risultato} = C) =& \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(C) + \dots \\ =& \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(C)[\mathbb{P}(C)^2 + \mathbb{P}(T)^2 + \mathbb{P}(C)^4 + \mathbb{P}(T)^4 + \mathbb{P}(C)^2\mathbb{P}(T)^2 + \dots]\end{aligned}$$

(2) No! Infatti

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{risultato} = T) =& \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T) + \dots \\ =& \mathbb{P}(T)\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(C)^i \\ =& p(\frac{1}{1-(1-p)} - 1) \\ =& p(\frac{1}{p} - 1) \\ =& 1 - p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{risultato} = C) =& \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(C) + \dots \\ =& \mathbb{P}(C)\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(T)^i \\ =& (1-p)(\frac{1}{1-p} - 1) \\ =& 1 - (1-p) \\ =& p\end{aligned}$$

Esercizio 3.4. Sia $S = \{1; 2; \dots; n\}$ e si supponga che A e B siano, indipendentemente, due a caso dei 2^n sottoinsiemi di S (incluso l'insieme vuoto e S stesso.) Provare che

(1) $\mathbb{P}(A \subset B) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
(2) $\mathbb{P}(A \cap B = \emptyset) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
(3) $\mathbb{P}(A \sqcup B = S) = \frac{1}{2^n}$.

Soluzione.

(1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \subset B) =& \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \frac{2^{|S_i|}}{2^n} \\
=& \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \\
=& \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} \\
=& \frac{1}{4^n} (2+1)^n \\
=& \frac{3^n}{4^n}
\end{aligned}$$

(2) Esattamente analogo al precendente.

(3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \sqcup B) =& \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} \\
=& \frac{1}{4^n} \sum_{i=1}^{2^n} 1 \\
=& \frac{2^n}{4^n}
\end{aligned}$$

Variabili aleatorie discrete

Esercizio 4.1 Un'urna contiene n palline, alcune bianche ed altre nere.

(1) Quante sono le palline bianche se sappiamo che estreando due palline dall'urna senza reinserimento abbiamo la stessa probabilità di avere due palline dello stesso colore o due palline di colori diversi?
(2) Quante sono le palline bianche se sappiamo che estrando due palline dall'urna **con** reinserimento abbiamo la stessa probabilità di avere due palline dello stesso colore o due palline di colori diversi?

Soluzione. Sia x il numero di palline bianche e $n - x$ il numero di palline nere.

(1) La probabilità di pescare due palline delle stesso colore è

$$\mathbb{P}(BB) + \mathbb{P}(NN) = \frac{x(x-1)}{n(n-1)} + \frac{(n-x)(n-x-1)}{n(n-1)}$$

mentre la probabilità di prescare due palline di colori diversi è

$$\mathbb{P}(BN) + P(BN) = 2\mathbb{P}(BN) = 2\frac{x(n-x)}{n(n-1)}.$$

Quindi dobbiamo risolvere l'equazione nella variabile x

$$\frac{x(x-1)}{n(n-1)} + \frac{(n-x)(n-x-1)}{n(n-1)} = 2\frac{x(n-x)}{n(n-1)}.$$

Dopo qualche conto otteniamo
$$4x^2 - 4nx + n(n-1) = 0$$
e dunque
$$x = \frac{n - \sqrt{n}}{2}$$
(2) Analogo al punto precedente, basta sostituire n ad $n-1$ nei denominatori delle probabilità calcolate, e x a $x-1$, $n-x$ a $n-1-x$ nei numeratori di $\mathbb{P}(BB)$ e $\mathbb{P}(NN)$ rispettivamente. Come risultato otteniamo $x = \frac{n}{2}$.

Esercizio 4.2 Ogni sera diversi meteorologi danno la probabilità che il giorno seguente piova. Per giudicare quanto sono accurate le loro previsioni, assegniamo i seguenti punteggi: se un meteorologo dice che pioverà con probabilità pari a p, allora riceverà $1-(1-p)^2$ punti se piove il giorno dopo e $1-p^2$ punti altrimenti.

Uno dei meteorologi è a conoscenza di questo e pensa che domani pioverà con probabilità p^*. Quale valore di p dovrà annunciare se vuole massimizzare il suo punteggio atteso?

Soluzione. Sia X il punteggio del nostro metereologo. Secondo la sua previsione, se annuncia p il valore atteso del punteggio è dato da
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] =& p^*[1-(1-p)^2] + (1-p^*)[1-p^2] \\ =& -p^2 + 2pp^* + (1-p^*).\end{aligned}$$
Vogliamo ottimizzare il valore atteso. Questo risulta una parabola in p orientata verso il basso, pertanto ha il massimo in corrispondenza del vertici. Per ottenere l'ascissa del vertice è sufficiente derivare rispetto a p, porre la derivata uguale a zero, ed infine risolve l'equazione per p.
$$\frac{d}{dp}\mathbb{E}[X] = -2 + 2p^* = 0 \iff p^* = p.$$
Esercizio 4.3. Lanciamo n monete, ed ognuna di queste ha probabilità p di risutare in una testa. Ogni moneta che risulta in una testa viene lanciata una seconda volta. Qual è la legge della variabile aleatoria X="Numero di teste al secondo turno"?

Soluzione. È immediato vedere che X ha la stessa legge di Y ottenuta come segue: Lancio 2 volte ciascuna delle n monete, Y è il numero di monete che ha dato testa in ambo i lanci. È anche chiaro che ciascuna moneta dà due volte teste con probabilità p^2. Pertanto Y (e quindi X) è distribuita come una v.a. binomiale di parametro p^2, i.e.
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}(p^2)^k(1-p^2)^{n-k}.$$

Esercizio 4.4. Sia S_k l'insieme degli interi positivi con k cifre. Una moneta equa viene lanciata finché non esce testa per la prima volta. Sia T il lancio in cui si presenta la prima testa. Si scelga un numero uniformemente a caso $X \in S_T$. Qual è la legge di X?

Soluzione. Sia d_k il numero di cifre di $k \in \mathbb{N}$. Allora
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = k | T = d_k)\mathbb{P}(T = d_k) = \frac{1}{|S_{d_k}|}2^{-d_k}.$$
Si noti inoltre che $|S_{d_k}| = 9 \cdot 10^{d_k - 1}$.

Esercizio 4.5. Ci sono $2n$ persone che costituiscono n coppie. m persone muoiono. Assumendo che le m persone morte siano state sorteggiate uniformemente a caso, qual è il valore atteso del numero di coppie ancora in vita?

Soluzione. Sia E l'evento in cui una data coppia sopravvive. Allora
$$\mathbb{P}(E) = \frac{\binom{2n-1}{m}}{\binom{2n}{n}} =: p$$

Allora
$$\mathbb{E}[\#\text{coppie che sopravvivono}] = np = n\left(1 - \frac{m(4n-m-1)}{4n-2}\right) = n\left(1-\frac{m}{2n}\right)\left(1 - \frac{m}{2n-1}\right).$$

Esercizio 4.6. Ci sono due urne, l'urna R contiene n palline rosse, l'urna B contiene n palline blu. Ad ogni unità di tempo viene pescata una pallina da ciascuna urna e le palline sorteggiate vengono scambiate e reinserite nelle urne. Qual è il valore atteso del numero di palline rosse nell'urna R subito dopo il k-esimo scambio?
Soluzione. Ciascuna pallina rossa si torva in R subito dopo il k-esimo scambio se e solo se ha cambiato urna un numero pari di volte, perciò, detto E_k l'evento in cui una data pallina rossa si trova in R subito dopo il k-esimo scambio abbiamo
$$\mathbb{P}(E_k) = \sum_{m=0, m \text{ pari}}^{k} \binom{k}{m}\left(\frac{1}{n}\right)^m\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-m}$$
Idea:
$$(a+b)^k + (a-b)^k = \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}a^{k-m}b^m + (-1)^m a^{k-m}b^m = 2\sum_{m=0, m \text{ pari}}\binom{k}{m}a^{k-m}b^m$$
e quindi
$$\mathbb{P}(E_k) = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]^k + \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]^k\right\} = \frac{1}{2}\left\{1+\left(1-\frac{2}{n}\right)^k\right\}.$$
Sia ora X_k il numero di palline rosse in R subito dopo il k-esimo scambio. Allora
$$\mathbb{E}[X_k] = n\mathbb{P}(E_k) = \frac{n}{2}\left\{1+\left(1-\frac{2}{n}\right)^k\right\}.$$

Esercizio 4.8. Una nota marca di snack mette una sorpresa in ogni pacchetto di merendine. Ci sono in tutto n diverse sorprese, ed in ogni pacchetto ho la stessa probabilità di trovare ciascuna di queste.

(1) Se ho già trovato j sorprese diverse, quanti pacchetti mi aspetto di dover comprare per trovare una sorpresa diversa da quelle che già possiedo?
(2) Quanti pacchetti mi aspetto di dover comprare per completare la collezione?

Soluzione

(1) $\mathbb{P}(\text{trovare la } j+1\text{-esima figurina}|\text{Ho } j \text{ figurine diverse}) = \frac{n-j}{n}$. Dunque X_{j+1}, il numero di pacchetti che devo scartare per trovare la $j+1$-esima figurina dato che ne ho già j, è una variabile aleatoria geometrica di parametro $\frac{n-j}{j}$. Ne segue che $\mathbb{E}[X_{j+1}] = \frac{n}{n-j}$.
(2) Sia Y il tempo necessario per completare la collezione. Ma Y non è altro che la somma $X_0 + \cdots + X_{j-1}$, pertanto
$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n}{n-j} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
dove ho usato il cambio di variabile $k = n-j$.

Esercizio 4.9 Un antenna invia il segnale 0000 con probabilità p_0, 1111 con probabilità p_1 e 2222 con probabilità $p_2 = 1 - p_0 - p_1$. Una cifra viene ricevuta in maniera in maniera corretta con probabilità q, e nel caso questo non avvenga le due alternative possibili sono equiprobabili. Qual è la probabilità che l'antenna abbia inviato la stringa 0000 se si riceve la stringa 0120?
Soluzione. Siano X e Y rispettivamente il segnale inviato e quello ricevuto. Per Bayes
$$\mathbb{P}(X = 0000|Y = 0120) = \frac{\mathbb{P}(Y = 0120|X = 0000)\mathbb{P}(X = 0000)}{\mathbb{P}(Y = 0120)}.$$

Per le probabilità totali $\mathbb{P}(Y = 0120)$ è uguale a

$\mathbb{P}(Y = 0120|X = 0000)\mathbb{P}(X = 0000)+\mathbb{P}(Y = 0120|X = 1111)\mathbb{P}(X = 1111)+\mathbb{P}(Y = 0120|X = 2222)\mathbb{P}(X = 2222).$

Ora basta notare che

$$\mathbb{P}(X = 0000) = p_0$$
$$\mathbb{P}(X = 1111) = p_1$$
$$\mathbb{P}(X = 2222) = p_2$$
$$\mathbb{P}(Y = 0120|X = 0000) = q^2(1-q)^2\frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(Y = 0120|X = 1111) = \mathbb{P}(Y = 0120|X = 2222) = q(1-q)^3\frac{1}{8}.$$

Ne segue che

$$\mathbb{P}(X = 0000|Y = 0120) = \frac{2p_0q}{2p_0q + (1-q)(1-p_0)}.$$

Esercizio 4.10 Un geologo stima che un dato fiume ogni km si può estinguere con probabilità 1/4, si può biforcare con la stessa probabilità, e con la restante probabilità continua il suo corso. Il geologo suppone anche che ciò che succede ad ogni km è indipendente da ciò che è avvenuto al km precedente.

(1) Qual è la probabilità che dopo 2 km dalla sorgente ci sia ancora almeno un corso d'acqua?
(2) Qual è la probabilità che dopo 1 km ci siano due corsi d'acqua sapendo che dopo 2 km non ce n'è neanche uno?

Soluzione. Sia X_k la v.a. che conta il numero di corsi d'acqua dopo k kilometri dalla sorgente.

(1)
$$\mathbb{P}(X_2 > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4\frac{1}{4}\frac{1}{4}}\right) = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}.$$

(2)
$$\mathbb{P}(X_1 = 2|X_2 = 0) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 2)}{\mathbb{P}(X_2 = 0)} = \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{25}{64}} = \frac{1}{25}.$$

Esercizio 4.11 Un'urna contiene b palline bianche e n palline nere. Si effettuano delle estrazioni consecutive e dopo ogni estrazione si reinseriscono nell'urna la pallina estratta ed altre k palline dello stesso colore di quella estratta.

(1) Qual è la probabilità che alla seconda estrazione esca una pallina bianca?
(2) Qual è la probabilità che alla prima estrazione esca una pallina bianca, sapendo che alla seconda estrazione è uscita una pallina bianca?
(3) Qual è la probabilità che all'n-esima estrazione esca una pallina bianca?

Soluzione. Sia X_i l'evento "All'i-esima estrazione si estrae una pallina bianca".

(1) $\mathbb{P}(X_2) = \frac{b}{b+n}\frac{b+k}{b+n+k} + \frac{n}{b+n}\frac{b}{b+n+k} = \frac{b}{b+n}$.
(2) $\mathbb{P}(X_1|X_2) = \frac{\mathbb{P}(X_2|X_1)\mathbb{P}(X_1)}{\mathbb{P}(X_2)} = \frac{\frac{b+k}{b+n+k}\frac{b}{b+n}}{\frac{b}{b+n}} = \frac{b+k}{b+n+k}$.
(3) $\mathbb{P}(X_i) = \frac{b}{b+n}$, $\forall i \geq 1$.

Esercizio 4.12 Abbiamo un mazzo di n chiavi di cui una sola apre la porta davanti a noi.

(1) Quanti tentativi mi aspetto di dover fare per aprire la porta se ogni volta che una chiave non apre la porta la rimetto nel mazzo?
(2) Quanti tentativi mi aspetto di dover fare per aprire la porta se ogni volta che una chiave non apre la porta la levo dal mazzo?

Soluzione. Sia X la v.a. che conta il numero di tentativi necessari ad aprire la porta.

(1) $X \sim \mathcal{G}eom\left(\frac{1}{n}\right)$. Dunque $\mathbb{E}[X] = n$.

(2) In questo caso $\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}$, $\forall k \le n$. Quindi

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Esercizio 4.13 Ciascuno dei componenti prodotti da una frabbrica ha probabilità p di essere difettoso. Ogni componente ha probabilità q di essere ispezionato, e nel caso in cui risulti difettoso all'ispezione viene scartato. I componenti che non vengono scartati vengono messi in commercio.

(1) Consideriamo un lotto di n componenti. Sia X la v.a. che conta il numero di componenti del lotto che vengono messi in commercio. Qual è la legge di X?
(2) Assumiamo $X=k$ e chiamiamo Y la variabile aleatoria che conta il numero di componenti del lotto che pur essendo stati messi in commercio sono difettosi. Qual è la legge di Y?
(3) Supponiamo che i componenti vengano commercializzati in scatole da 100 pezzi. Sia Z la v.a. che conta i componenti funzionanti di una data scatola. Qual è la legge di Z?

Soluzione. Fissato un componente, siano V l'evento "il componente viene messo in commercio", F l'evento "il componente è funzionante", I l'evento "il componenente è stato ispezionato".

(1) $\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}(I^c)+\mathbb{P}(I\cap F)=(1-q)+q(1-p)=1-qp$. Allora

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}(1-qp)^k(qp)^{n-k},\ \ \forall k\le n,$$

ovvero $X\sim \mathcal{B}in(n,1-pq)$.

(2) $\mathbb{P}(F|V)=\frac{\mathbb{P}(V|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(V)}=\frac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(V)}=\frac{1-p}{1-pq}$. Quindi $\mathbb{P}(F^c|V)=1-\frac{1-p}{1-pq}$.

$$\mathbb{P}(Y=h|X=k)=\binom{k}{h}\left(\frac{1-p}{1-pq}\right)^{k-h}\left(1-\frac{1-p}{1-pq}\right)^{h},\ \ \forall h\le k,$$

i.e. $Y\sim \mathcal{B}in\left(k,1-\frac{1-p}{1-pq}\right)$.

(3) $\mathbb{P}(Z=\ell)=\binom{100}{\ell}\left(\frac{1-p}{1-pq}\right)^{\ell}\left(1-\frac{1-p}{1-pq}\right)^{100-\ell}$, $\forall \ell\le 100$. Quindi $Z\sim\mathcal{B}in\left(100,\frac{1-p}{1-pq}\right)$.

Esercizio 4.14 Per tornare a casa il sabato sera 8 studenti chiamano due taxi, Ancona10 e Bari20. Ogni taxi può portare 4 persone. Uno dopo l'altro, ciascuno studente sceglie uniformemente a caso uno dei due taxi e sale a bordo, finché uno dei due taxi è piano e parte.

(1) Qual è la probabilità che nel momento in cui uno dei due taxi parte a terra ci siano ancora 3 persone?
(2) Qual è la probabilità che il primo taxi a partire sia Ancona10, sapendo che alla partenza del primo taxi ci sono ancora 3 persone a terra?
(3) Qual è il valore atteso del numero di persone a terra quando il primo taxi parte?

Soluzione. Sia X la v.a. che conta il numero di persone a terra quando parte il primo taxi. Chiamiamo iA l'evento "i persone sono entrate nel taxi Ancona 10", e analogamente per iB.

(1) $\mathbb{P}(X=3)=2\mathbb{P}(3A\cap 1B\cap\{\text{una persona entra in}A\})=2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\binom{4}{1}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.
(2) Banale.
(3) $\mathbb{P}(X=0)=0$,

$$\mathbb{P}(X=1)=2\mathbb{P}(3A\cap 3B\cap\{\text{una persona entra in}A\})=2\frac{1}{2^6}\binom{6}{3}\frac{1}{2}=\frac{5}{16},$$

$$\mathbb{P}(X=2)=2\mathbb{P}(3A\cap 2B\cap\{\text{una persona entra in}A\})=2\frac{1}{2^5}\binom{5}{2}\frac{1}{2}=\frac{5}{16},$$

$$\mathbb{P}(X=4)=2\mathbb{P}(4A)=2\frac{1}{2^4}=\frac{1}{8}.$$

Ora che sappiamo la legge di X è facile calcolare

$$\mathbb{E}[X] = \frac{35}{16}.$$

Esercizio EXTRA Sia X una permutazione uniformemente random dei primi n numeri naturali. Qual è la probabilità che X abbia r numeri nelle loro posizioni originali?