I Esonero di Metodi Matematici per l'Ottica del 10 - 5 - 2017

E. Scoppola

TESTO 1

Esercizio 1

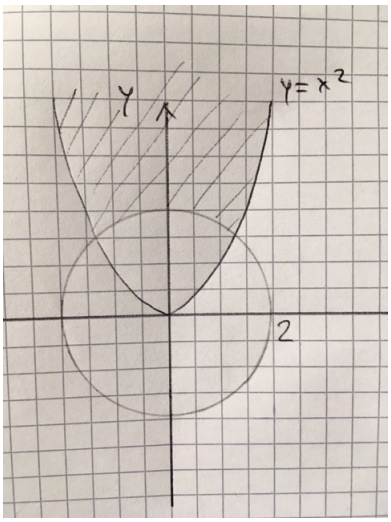
Determinare e disegnare l' insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \frac{\log(y-2x^2)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$$

Abbiamo le condizioni:

$$y > 2x^2, \qquad x^2+y^2 > 4$$

e dunque la regione



Esercizio 2

Determinare il gradiente e la derivata direzionale della seguente funzione nella direzione indicata e nel punto indicato

$$g(x,y) = e^{x(x+y)}, \quad \mathbf{v} = (0,-1), \quad P = (2,1)$$

Abbiamo

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x(x+y)}(2x+y), e^{x(x+y)}x\right)$$

che calcoliamo in P:

$$\nabla f(2,1) = (5e^6, 2e^6)$$

e dunque

$$f_{\hat{\mathbf{v}}}(2,1) = -2e^6$$

Esercizio 3

Determinare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$$

Risolvendo il sistema di equazioni:

$$f_x = 3x^2 - 3 + y^2 = 0$$

$$f_y = 2xy = 0$$

otteniamo i punti critici:

$$P_1 = (1,0),\ P_2 = (-1,0),\ P_3 = (0,-\sqrt{3}),\ P_4 = (0,\sqrt{3})$$

Per determinare i massimi e i minimi studiamo le derivate seconde:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

che calcolato in P_1 ha determinante positivo e primo elemento positivo dunque P_1 è minimo; calcolato in P_2 ha determinante positivo e primo elemento negativo dunque P_1 è massimo; calcolato in P_3 e P_4 ha determinante negativo dunque questi punti sono selle.

Esercizio 4

Studiare il carattere delle serie numeriche:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n!}, \qquad a \geq 0$$

S_1 è una serie a termini non negativi che per il criterio del confronto converge, infatti

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

armonica generalizzata che converge. La serie S_2 ha termini positivi e per il criterio del rapporto converge, infatti

$$\frac{a^n}{(n+1)!}\frac{n!}{a^{n-1}} = \frac{a}{n+1} \to 0$$

Esercizio 5

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3-2^n}{4^n}$$

Abbiamo in entrambi i casi serie geometriche:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = \frac{1}{1-1/e^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3-2^n}{4^n} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 - 2 = 2$$

Esercizio 6

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \log\sqrt{1+x} = \frac{1}{2}\log(1+x)$$

Ricordando lo sviluppo di $\log(1+x)$ ottenuto integrando la geometrica di ragione $-x$ otteniamo

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

Esercizio 7

Sviluppare in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione periodica

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ 2x & \text{per } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Otteniamo

$$f(x) = \frac{3}{4}\pi - \frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$$

infatti:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \int_0^{\pi} 2xdx\Big) = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\pi^2}{2} + 2\frac{\pi^2}{2}\Big) = \frac{3}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx + \int_0^{\pi} 2x\cos nxdx\Big)$$

Calcoliamo, integrando per parti, l'integrale

$$\int_a^b x\cos nxdx = x\frac{\sin nx}{n}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\sin nx}{n}dx = x\frac{\sin nx}{n}\Big|_a^b + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_a^b \qquad (1)$$

Considerando che $\sin n\pi = 0$ per ogni n e che $\cos n\pi = \cos(-n\pi) = (-1)^n$ otteniamo che $a_n = 0$ per n pari mentre per n dispari abbiamo

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\Big(-2-4\Big) = -\frac{6}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx + \int_0^{\pi} 2x\sin nxdx\Big)$$

Calcoliamo, integrando per parti, l'integrale

$$\int_a^b x\sin nxdx = -x\frac{\cos nx}{n}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos nx}{n}dx = -x\frac{\cos nx}{n}\Big|_a^b + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_a^b \qquad (2)$$

e dunque

$$b_n = \frac{1}{\pi}\Big(x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - 2x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\Big) = -\frac{(-1)^n}{n}$$

TESTO 2

Esercizio 1

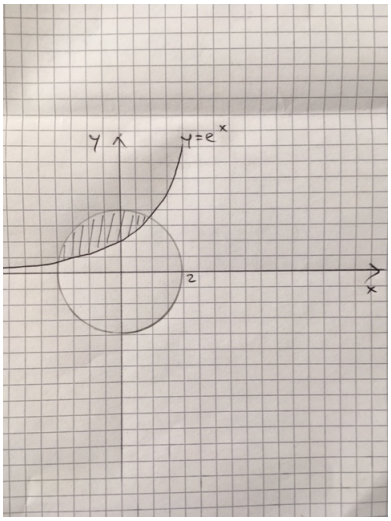
Determinare e disegnare l' insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \frac{\log(y - e^x)}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$$

Abbiamo le condizioni:

$$y > e^x, \qquad x^2 + y^2 < 4$$

e dunque la regione



Esercizio 2

Determinare il gradiente e la derivata direzionale della seguente funzione nella direzione indicata e nel punto indicato

$$g(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2), \quad \mathbf{v} = (0,1), \quad P = (1,1)$$

Abbiamo

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}\Big)$$

che calcoliamo in P:

$$\nabla f(1,1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

e dunque

$$f_{\hat{\mathbf{v}}}(1,1) = \frac{2}{3}$$

Esercizio 3

Determinare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

Risolvendo il sistema di equazioni:

$$f_x = 2x(y^2 - 1) = 0$$

$$f_y = 2y(x^2 - 1) = 0$$

otteniamo i punti critici:

$$P_1 = (0,0),\ P_2 = (-1,-1),\ P_3 = (-1,1),\ P_4 = (1,-1),\ P_5 = (1,1)$$

Per determinare i massimi e i minimi studiamo le derivate seconde:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y^2-1) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2-1) \end{pmatrix}$$

che calcolato in P_1 ha determinante positivo e primo elemento negativo dunque P_1 è massimo; calcolato in P_2, P_3, P_4, P_5 ha determinante negativo dunque questi punti sono selle.

Esercizio 4

Studiare il carattere delle serie numeriche:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n-1)!}, \qquad a \geq 0$$

S_1 è una serie a termini non negativi che per il criterio del confronto diverge, infatti

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

armonica generalizzata che diverge. La serie S_2 ha termini positivi e per il criterio del rapporto converge, infatti

$$\frac{a^{n+2}}{n!}\frac{(n-1)!}{a^{n+1}} = \frac{a}{n+1} \to 0$$

Esercizio 5

Calcolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{5^n}$$

Abbiamo in entrambi i casi serie geometriche: la prima è la geometrica di ragione a che non ha limite per $a \leq -1$, converge a $\frac{1}{1-a}$ per $a \in (-1,1)$ e diverge per $a > 1$. Per la seconda scriviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{5}{4} + \frac{5}{3} = \frac{35}{12}.$$

Esercizio 6

Sviluppare in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Lo sviluppo in serie di potenze lo otteniamo direttamente derivando la geometrica di ragione x. Otteniamo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Esercizio 7

Sviluppare in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione periodica

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \in (-\pi, 0) \\ -3x & \text{per } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Otteniamo

$$f(x) = -\pi + \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$$

Infatti

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \Big(\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_{0}^{\pi} (-3)xdx \Big) = \frac{1}{2\pi} \Big(-\frac{\pi^2}{2} - 3\frac{\pi^2}{2} \Big) = -\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{0} x \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} (-3x) \cos nx dx \Big)$$

Considerando l' equazione (1) e ricordando che $\sin n\pi = 0$ per ogni n e che $\cos n\pi = \cos(-n\pi) = (-1)^n$ otteniamo che $a_n = 0$ per n pari mentre per n dispari abbiamo

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi} \Big(2 + 6 \Big) = \frac{8}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{0} x \sin nx dx - 3 \int_{0}^{\pi} x \sin nx dx \Big)$$

Considerando l' equazione (2) abbiamo

$$b_n = \frac{1}{\pi} \Big(-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{0} + 3x \frac{\cos nx}{n} \Big|_{0}^{\pi} \Big) = -\frac{(-1)^n}{n} + 3\frac{(-1)^n}{n} = 2\frac{(-1)^n}{n}$$