II Esonero di Metodi Matematici per l'Ottica del 9-6-17

E. Scoppola

Esercizio 1

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$y' = 2xy + x, \quad \text{con} \quad y(0) = 0$$

Soluzione:

E' un'equazione lineare del prim' ordine con $a(x) = 2x$, con primitiva $A(x) = x^2$, e $b(x) = x$ e dunque applicando la formula per le soluzioni delle equazioni lineari otteniamo

$$y(x) = e^{x^2} \left(C + \int e^{-x^2} x dx \right) = e^{x^2} \left(C - \frac{1}{2} e^{-x^2} \right) = C e^{x^2} - \frac{1}{2}.$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $0 = C - \frac{1}{2}$ e dunque $C = \frac{1}{2}$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1).$$

Esercizio 2

Integrare la seguente equazione:

$$y dx = -x(1 + xy^2) dy$$

Soluzione:

Conviene risolvere l'equazione determinando $x(y)$. Abbiamo

$$x'(y) = -\frac{x}{y} - x^2 y$$

e dunque un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 2$, con $a(y) = -\frac{1}{y}$ e $b(y) = -y$. Facendo un cambiamento di variabile e passando alla variabile $z = [x(y)]^{-1}$ otteniamo per z l'equazione

$$z'(y) = \frac{z}{y} + y$$

con soluzione $z(y) = y(C + y)$ e dunque $x(y) = \frac{1}{y^2 + Cy}$.

Esercizio 3

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$x y' = \frac{1}{y^2}, \quad \text{con} \quad y(1) = 1$$

Soluzione:

Possiamo risolvere col metodo di separazione delle variabili ottenendo

$$y^2 dy = \frac{1}{x} dx$$

e dunque

$$\frac{y^3}{3} = \log x + C.$$

Utilizzando il dato iniziale otteniamo $C = \frac{1}{3}$ e dunque la soluzione

$$y(x) = \left(3 \log x + 1\right)^{1/3}.$$

Esercizio 4

Determinare la soluzione del problema:

$$y'' - y = e^{2x} + \sin x \quad \text{con} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Soluzione:

Ci calcoliamo separatamente la soluzione y_{omog} dell'equazione omogenea associata:

$$y'' - y = 0$$

e le soluzioni particolari $y_{part.1}$ e $y_{part.2}$ soluzioni rispettivamente delle equazioni

$$y'' - y = e^{2x}, \quad y'' - y = \sin x.$$

Per l'omogenea abbiamo il polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

con soluzioni $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$. Otteniamo dunque

$$y_{omog} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \tag{1}$$

Poniamo $y_{part.1} = A e^{2x}$. Otteniamo l'equazione per A :

$$4A - A = 1$$

da cui otteniamo

$$y_{part.1}(x) = \frac{1}{3} e^{2x}. \tag{2}$$

Ponendo poi $y_{part.2} = A \cos x + B \sin x$ abbiamo l'equazione

$$-A \cos x - B \sin x - A \cos x - B \sin x = \sin x$$

da cui otteniamo $A = 0$ e $B = -\frac{1}{2}$ e dunque

$$y_{part.2}(x) = -\frac{1}{2} \sin x. \tag{3}$$

Dalle equazioni (1), (2) e (3) e dal principio di sovrapposizione otteniamo la soluzione

$$y(x) = y_{omog}(x) + y_{part.1}(x) + y_{part.2}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} \sin x$$

Utilizzando i dati iniziali otteniamo: $y(0) = 1 = C_1 + C_2 + \frac{1}{3}$ e $y'(0) = 0 = C_1 - C_2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ da cui $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_2 = \frac{5}{12}$ e dunque la soluzione

$$y(x) = \frac{1}{4} e^x + \frac{5}{12} e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} \sin x$$

Esercizio 5

Determinare la soluzione del problema:

$$xy\partial_x f(x, y) + y^2\partial_y f(x, y) = 0 \quad \text{con} \quad f(x, 1) = 2e^x$$

Soluzione:

Abbiamo

$$a(x, y) = xy = \frac{dx}{dt}, \quad b(x, y) = y^2 = \frac{dy}{dt}$$

da cui ricaviamo

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} \quad \text{equivalente a} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

da cui

$$\log x = \log y + C \quad \text{e dunque} \quad \frac{x}{y} = C.$$

La soluzione della equazione è dunque data da una qualunque funzione $g(\frac{x}{y})$. Considerando la condizione al bordo $f(x, 1) = 2e^x$ otteniamo

$$f(x, y) = 2e^{\frac{x}{y}}.$$